Medizinische Informatik
Universität Heidelberg
Hochschule Heilbronn

Hochschule Heilbronn

Technik Wirtschaft Informatik

Klausurübungen

Analysis 2 - Tutorium

Simon Schweizer
simon-tobias.schweizer@hs-heilbronn.de

Campus Heilbronn

Inhalte

- Differentialgleichungen
- Fourierreihen
- Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$
  - Extremwertaufgaben → Maxima, Minima
- Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$
- Kurven
  - Bogenlänge
  - Kurvenintegrale
- Oberflächen
- Flussintegrale

Lineare Differentialgleichungen

- Überprüfen, ob überhaupt linear
- Immer erst die zugehörige homogene Diff.-Gleichung lösen, dann eine spezielle Lösung finden
- $y = y_h + y_0$
  (homogene Lösung + spezielle Lösung)
  →allgemeine Lösung (mit Konstanten)
- bei eingesetzten Anfangsbedingungen:
  spezielle Lösung

linear, homogen, 1. Ordnung

- kein allgemeines Verfahren, nur für Spezialfälle
- Wenn $y' = g(x) * h(y)$ dann durch Trennung der Variablen und anschließende Integration
  Ersetzen von y' durch $\frac{dy}{dx}$: $\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$
  $\Leftrightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$ und Auflösen nach y
- Wenn $y' + a(x) * y = 0 : y = c * e^{\int -a(x)dx}$
  da: $y' = -y * a(x)$

linear, inhomogen, 1. Ordnung

- Wenn $y' + a(x) * y = f(x)$ dann ist $y = y_h + y_0$:
- y_h ist die Lösung der zugehörigen homogenen Dgl.
- y_0 ist eine spezielle Lösung:

$$y_0 = C(x) * e^{-\int a(x)dx}, C(x) = \int f(x) * e^{\int a(x)dx}\, dx$$

- Wiederholung: Integration durch
  - Substitution (z.B. von $\int a(x)\, dx$)
  - partielle Integration ($f(x)$ ist in der Regel abzuleiten)
  - Partialbruchzerlegung (hier i.d.R. nicht benötigt)

linear, inhomogen, 1. Ordnung Spezialfälle

- $y' + a(x) * y = f(x)$ mit $a(x) = a$:
  $$y' + a * y = f(x)$$
  hat die homogene Lösung $y = ce^{-ax}$
- abhängig vom Typ von $f(x)$ ist y_0

Rechte Seite f(x)	Lösungsansatz y_s
Polynom vom Grad $n \geq 0$: $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$	$y_s = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$.
$f(x) = A \sin(\omega x)$ oder $f(x) = B \cos(\omega x)$ oder $f(x) = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x)$	$y_s = C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x)$ oder $y_s = C \sin(\omega x + \varphi)$
$f(x) = A \exp(bx)$	$y_s = \begin{cases} C \exp(bx) & \text{, falls } b \neq -a \\ C\ x \exp(bx) & \text{, falls } b = -a \end{cases}$

linear, homogen, 2. Ordnung

- Form: $y'' + ay' + by = 0$
- Darstellung als quadratische Gleichung:
$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$
- Lösen der Gleichung: λ_1 und λ_2
  - $\lambda_1 \neq \lambda_2 : y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
  - $\lambda_1 = \lambda_2 : y = (C_1 x + C_2) e^{\lambda_1 x}$
  - $\lambda_1 \wedge \lambda_2 \notin \mathbb{R} : \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$
$$y = e^{i\alpha}(C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x))$$
  - $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

linear, inhomogen, 2. Ordnung

- abhängig von λ_1 und λ_2
  - $\lambda_1 \neq \lambda_2 : y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

    $$= \frac{-\exp(\lambda_1 x)}{\lambda_2 - \lambda_1} \int \exp(-\lambda_1 x) f(x)\, dx + \frac{\exp(\lambda_2 x)}{\lambda_2 - \lambda_1} \int \exp(-\lambda_2 x) f(x)\, dx$$

  - $\lambda_0 \coloneqq \lambda_1 = \lambda_2 : y_h = (C_1 x + C_2) e^{\lambda_1 x}$

    $$= -\exp(\lambda_0 x) \int x \exp(-\lambda_0 x) f(x)\, dx + x \exp(\lambda_0 x) \int \exp(-\lambda_0 x) f(x)\, dx$$

  - $\lambda_1 \wedge \lambda_2 \notin \mathbb{R} : \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$

    $$y_h = e^{i\alpha}(C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x))$$

    $$= \frac{1}{\omega} \exp(\alpha x) \sin(\omega x) \int \exp(-\alpha x) \cos(\omega x) f(x)\, dx$$

    $$- \frac{1}{\omega} \exp(\alpha x) \cos(\omega x) \int \exp(-\alpha x) \sin(\omega x) f(x)\, dx$$

linear, inhomogen, 2. Ordnung

- einfachere Spezialfälle auf S.XXX

Rechte Seite f (x)	Lösungsansatz y_s
I. Polynom vom Grad n $f(x) = p_n(x)$	$y_s = \begin{cases} q_n(x) & , b \neq 0 \\ x q_n(x) & , a \neq 0, b = 0 \\ x^2 q_n(x) & , a = b = 0 \end{cases}$
II. $f(x) = A \exp(cx)$	1) c ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung $y_s = B \exp(cx)$
	2) c ist einfache Lösung der charakteristischen Gleichung $y_s = B\, x \exp(cx)$
	3) c ist doppelte Lösung der charakteristischen Gleichung $y_s = B\, x^2 \exp(cx)$

Rechte Seite f (x)	Lösungsansatz y_s
III. $f(x) = A \sin(\omega x)$ oder $f(x) = A \cos(\omega x)$ oder $f(x) = A_1 \sin(\omega x) + A_2 \cos(\omega x)$	1) $i\omega$ ist keine Lösung der charaktistischen Gleichung $y_s = B_1 \sin(\omega x) + B_2 \cos(\omega x)$ ODER $y_s = B \sin(\omega x + \varphi)$
	2) $i\omega$ ist Lösung der charaktistischen Gleichung $y_s = x\,(B_1 \sin(\omega x) + B_2 \cos(\omega x))$ oder $y_s = B\, x \sin(\omega x + \varphi)$
IV. $f(x) = p_n(x) \exp(cx) \sin(\omega x)$ oder $f(x) = p_n(x) \exp(cx) \cos(\omega x)$ oder $f(x) = p_n(x) \exp(cx) \sin(\omega x)$ $+ \tilde{p}_n(x) \exp(cx) \cos(\omega x)$ $= \exp(cx)\,(p_n(x) \sin(\omega x) + \tilde{p}_n(x) \cos(\omega x))$	1) $c + i\omega$ ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung $y_s = \exp(cx)\,(q_n(x) \sin(\omega x) + r_n(x) \cos(\omega x))$
	2) $c + i\omega$ ist einfache Lösung der charakteristischen Gleichung $y_s = x \cdot \exp(cx)\,(q_n(x) \sin(\omega x) + r_n(x) \cos(\omega x))$
	3) $c + i\omega$ ist doppelte Lösung der charakt. Gleichung (kann nur dann der Fall sein, wenn $\omega = 0$ ist) $y_s = x^2 \cdot r_n(x) \cdot \exp(cx)$

allgemeines Vorgehen

- Art der Differentialgleichung erkennen
  - linear
  - homogen
  - Ordnung
- homogene Lösung mit Formel bestimmen
- falls inhomogen: Spezialfall? → Formel anwenden
  ansonsten allgemeine Lösung verwenden

Übung

- Lösung der Gleichung: $2y'' - 16y' + 32y - 10x = 0$
  - $y'' - 8y' + 16y = 5x$
  - Homogen: $\lambda_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{(64-64)}}{2} = 4$

$$y_h = (C_1x + C_2)e^{4x}$$

  - Spezielle Lösung: Polynom vom Grad 1

$$Ax + B: 0 - 8A + 16Ax + 16B = 5x$$

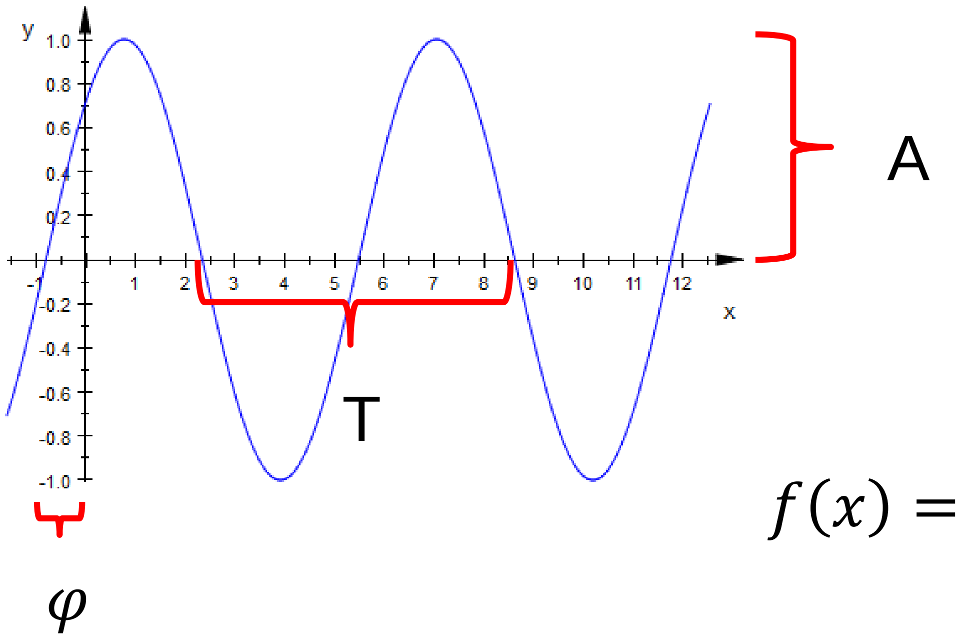
$$16A = 5 \rightarrow A = \frac{5}{16}, 8A = 16B \rightarrow B = \frac{5}{32}$$

  - Gesamt: $y = y_h + y_s = (C_1x + C_2)e^{4x} + \frac{5\mathrm{x}}{16} + \frac{5}{32}$

Übung

- Gleichung: $y'' - 5y' + 6y = e^{3x}(2x - 1)$

Schwingungen = periodische Funktionen



$$f(x) = A * \sin(2\pi f x + \varphi)$$

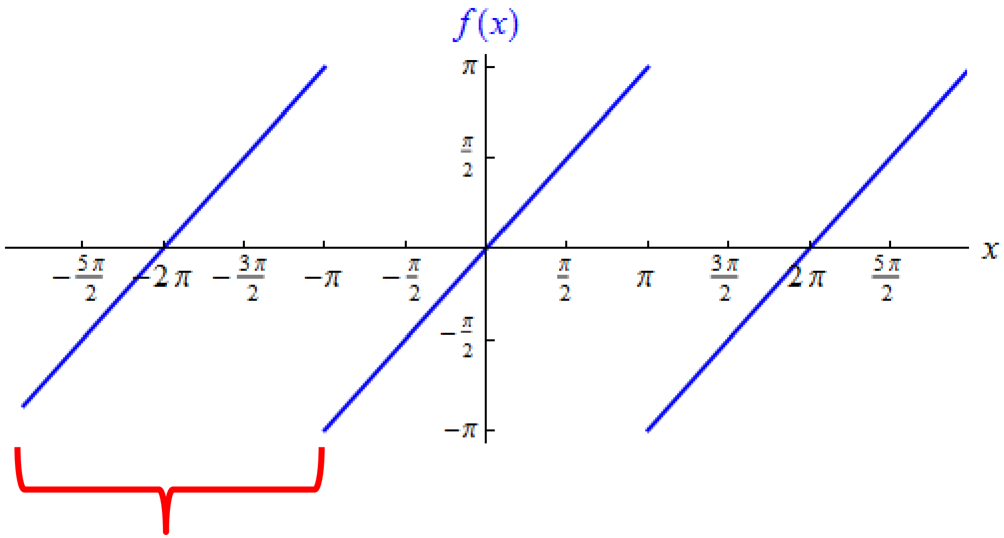
$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathrm{a} * \cos(2\pi f x)$$

mit Frequenz $f = \frac{1}{T}$

Amplitude A

Phasenverschiebung φ

periodische Funktionen



T T-periodische Funktion

$$f(x + nT) = f(x) \text{ mit } n \in \mathbb{Z}$$

Funktionen lassen sich periodisch fortsetzen

Umrechnung

- Spektraldarstellung
  - $f(x) = A * \sin(2\pi f x + \varphi)$
- Umformen mit Additionstheoremen in Fourierdarstellung
  - $f(x) = a * \cos(2\pi f x) + b * \sin(2\pi f x)$

    mit $a = A\sin(\varphi)$ und $b = A\cos(\varphi)$

    wenn $\varphi = 0 \Rightarrow a = 0 \,\&\, b = A$
    wenn $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = A \,\&\, b = 0$

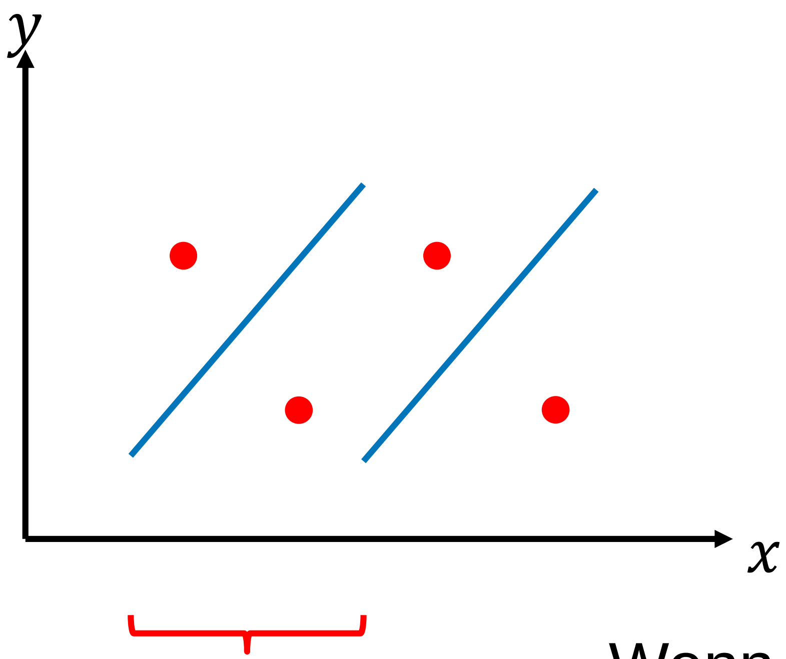
$A = \left|\binom{b}{a}\right| = \sqrt{b^2 + a^2}$
$a = A\sin(\varphi)$
$\Leftrightarrow \varphi = \arcsin(\frac{a}{A})$
oder allgemein:
$\varphi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right), a > 0, b > 0$
$\varphi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) + \pi, \mathrm{b} < 0$
$\varphi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) + 2\pi, a < 0, b < 0$
(entspricht Umrechnung bei komplexen Zahlen)

Fourierreihe (Überlagerung von Schwingungen)

- $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x))$
  - Mit $L = \frac{T}{2}$
  - Und den Fourier-Koeffizienten:
    - $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L+a}^{L+a} f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\, dx$
    - $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L+a}^{L+a} f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\, dx$
- Fourierreihe von f: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum \ldots$
- Stellt die Funktion eventuell nicht an allen Stellen dar.

Satz 3

Fourierreihe = Funktion?



$$F_f(x) = \frac{1}{2} * \left(f(x_0^+) + f(x_0^-)\right)$$

Wenn sie an x_0 stetig ist
(Grenzwerte und Funktionswert gleich)

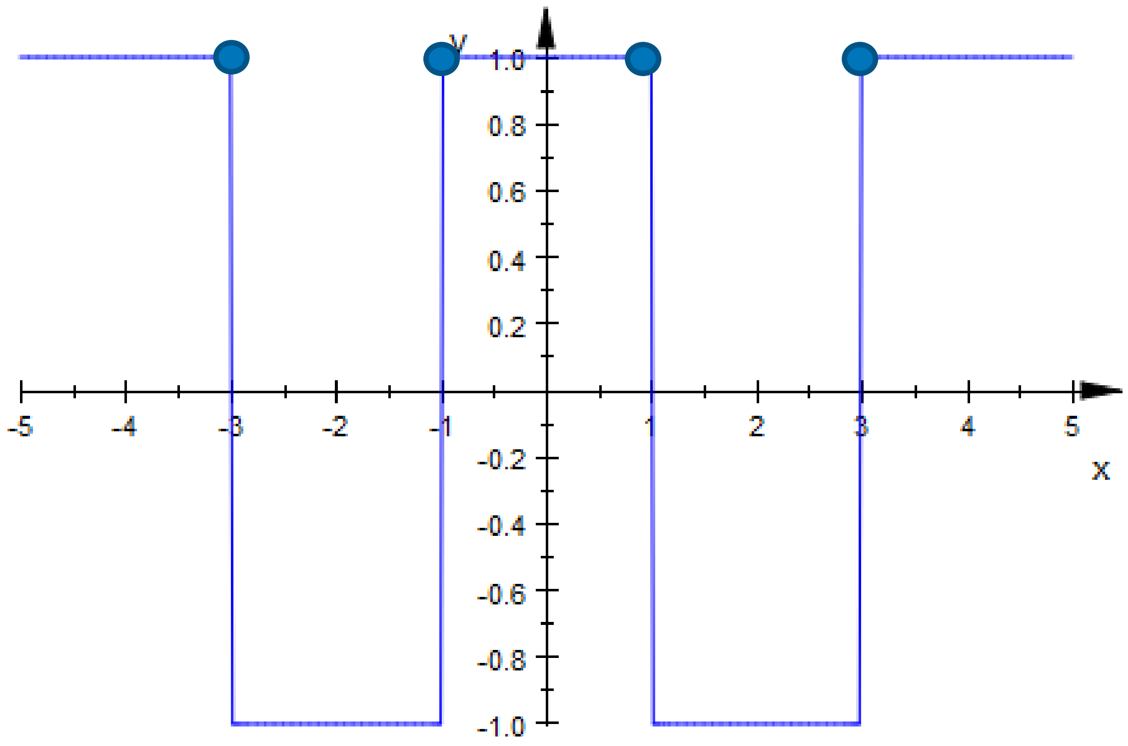
gerade / ungerade Funktionen

- wenn f eine gerade Funktion ist: $b_n = 0$
  - Gerade: $f(x) = f(-x)$
  - sin würde dafür sorgen, dass die Funktion nicht mehr gerade ist → nur cos-Anteile
- wenn f eine ungerade Funktion ist: $a_n = 0$
  - Ungerade: $f(x) = -f(-x)$
  - cos würde dafür sorgen, dass die Funktion nicht mehr ungerade ist → nur sin-Anteile

Fourierreihe - Vorgehen

- Gerade, ungerade Funktion? -> $a_n\ oder\ b_n$ 0
- a_n und b_n (bzw. c_n) bestimmen und eventuell vereinfachen
- In die allgemeine Fourierformel einsetzen
- Wenn gefordert bei nicht stetigen Stellen auf Konvergenz prüfen

Übungen



- Fourierreihe der Funktion $f(x) = \begin{cases} 1, x \in [-1,1] \\ -1, x \in (1,3) \end{cases}, x \in [-1,3)$
- Wo konvergiert die Fourierreihe gegen die Funktion, wo nicht?

Folgen im $\mathbb{R}^n$

- Jedem $k \in \mathbb{N}$ ist ein $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$ zugeordnet.

  Kurz $\left(\vec{x}^{(k)}\right)$
- Konvergenz: Die Folge konvergiert, wenn alle Koordinatengleichungen konvergieren
  - $= \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$ konvergiert gegen $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, wenn x_1 gegen a_1, x_2 gegen a_2, …, x_n gegen a_3 konvergiert
- Eine Folge kann maximal einen Grenzwert haben

Koordinatensysteme

Polarkoordinaten (im $\mathbb{R}^2$)

Darstellung von kartesischen Koordinaten durch $r\ (\geq 0)$ und den Winkel $\varphi \in [0,2\pi)$

$r = \left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$x = r\cos(\varphi)$

$\Leftrightarrow \varphi = \arccos(\frac{x}{r})$

$y = r\sin(\varphi)$

$\Leftrightarrow \varphi = \arcsin(\frac{y}{r})$

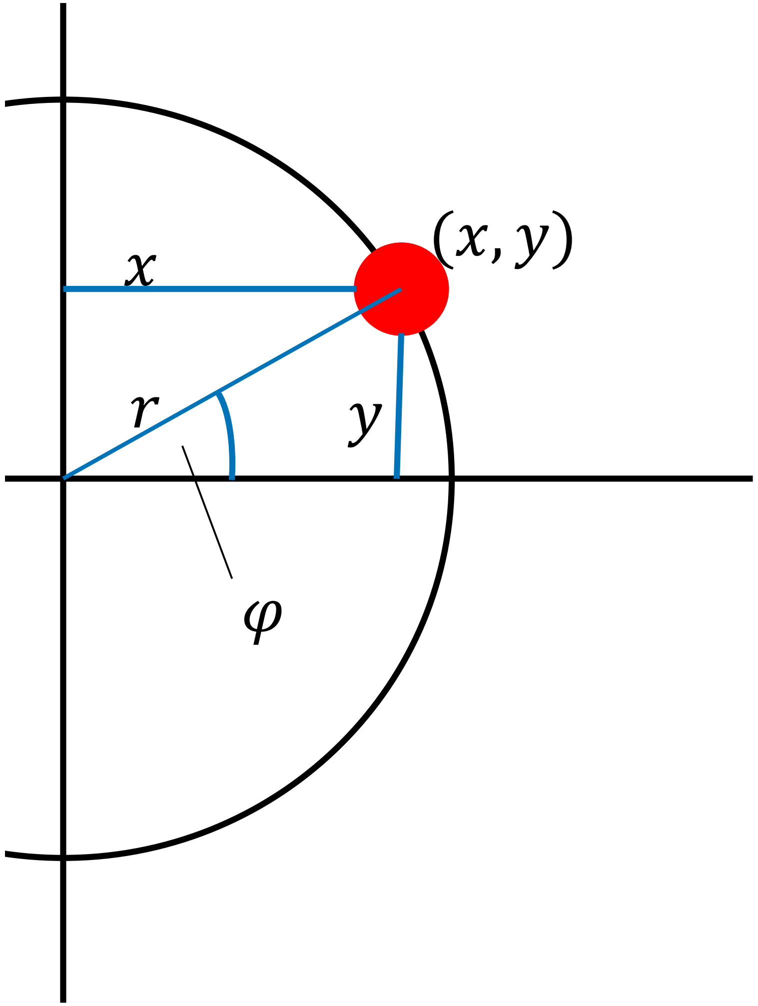
oder allgemein:

$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),\ y > 0, x > 0$

$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, \mathrm{x} < 0$

$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi, y < 0, x < 0$

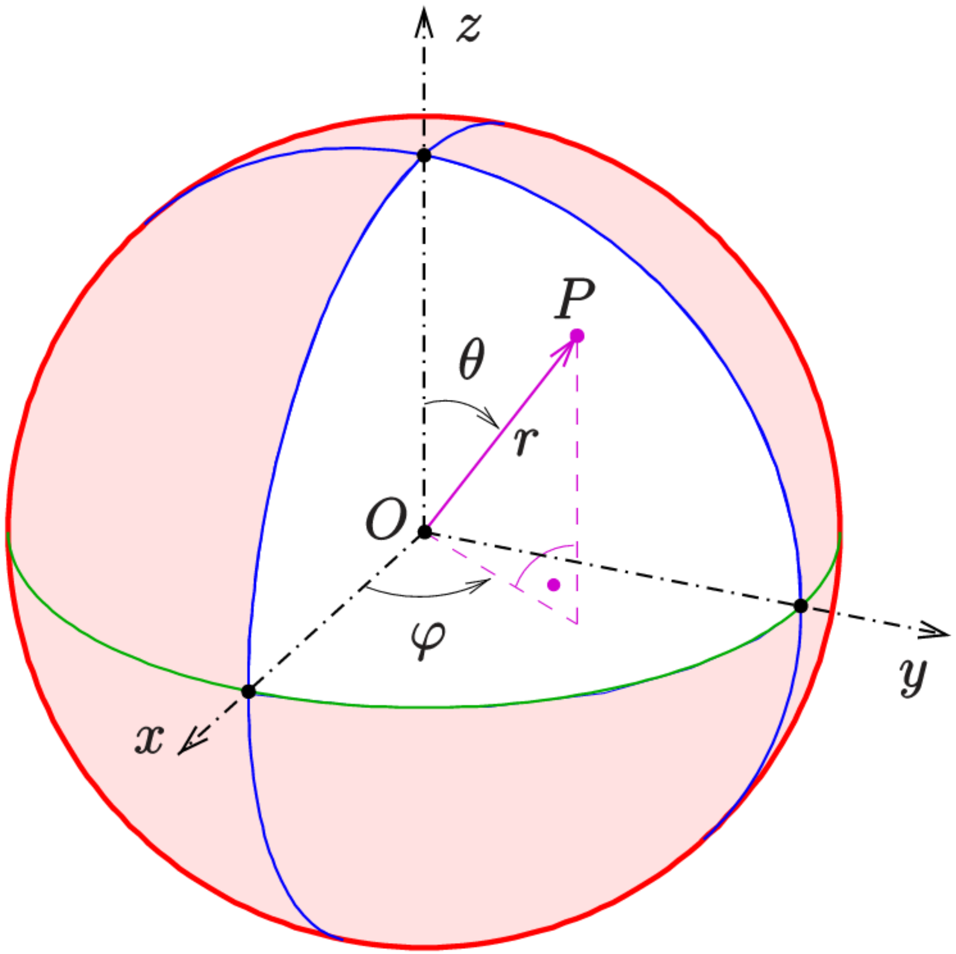
(entspricht Umrechnung bei komplexen Zahlen)



Koordinatensysteme

- Zylinderkoordinaten (im $\mathbb{R}^3$) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
  - Wie Polarkoordinaten $x, y \ \rightarrow r, \varphi$
  - Dritte Koordinate bleibt erhalten $z \ \rightarrow z$

Koordinatensysteme



- Kugelkoordinaten (im $\mathbb{R}^3$) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
  - $r = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\|$
  - $\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$
  - $\cos(\theta) = \frac{z}{r}$
  - $x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$
  - $y = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$
  - $z = r \cos(\theta)$

Funktionen vom $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$

- Definitonsmenge $D \subset \mathbb{R}^2$
- Wertemenge $W = W(f) = \{f(\vec{x}) | x \in D\} \subset \mathbb{R}$
- Punkten aus D wird ein Funktionswert (eine Zahl) zugewiesen
  - z.B. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: x und y wird die Höhe z zugewiesen

Grenzwert

- Eine Funktion $\mathrm{f}: U\backslash\{\overrightarrow{x_0}\} \to \mathbb{R}$ hat den Grenzwert c, wenn für jede Folge, die gegen $\overrightarrow{x_0}$ konvergiert, gilt:

$$\lim_{k\to\infty} f\left(\vec{x}^{(k)}\right) = c$$

  - Das muss für jede Folge erfüllt sein!

Extremwertaufgaben - Vorgehen

- Funktion einmal nach allen Variablen ableiten (Gradient bestimmen)
  - Mögliche Extremwerte: $grad\ f(\vec{x}) = \vec{0}$
    - Minimum, Maximum oder Sattelpunkt
- Entscheidung über 2. Ableitungen
  - Hessesche Matrix
    - Hauptminoren alle pos.
Positiv definit > Minimum
    - Hauptminoren pos., neg., pos., …
Negativ definit > Maximum
    - Indefinit: Sattelpunkt
    - Semidefinit (0): keine Aussage

$$H_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{df}{dx_1 dx_1} & \cdots & \frac{df}{dx_1 dx_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df}{dx_n dx_1} & \cdots & \frac{df}{dx_n dx_n} \end{pmatrix}$$

Kettenregel

- $h = f \circ g \Leftrightarrow f\big(g(\vec{x})\big)$ mit $g\colon \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n, f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
- Für die Jacobische Funktionalmatrix von h gilt:
- $D_h(\vec{x}) = D_f(\vec{x}) * D_g(\vec{x})$
- „äußere Ableitung mal innere Ableitung“

MuPAD-Befehle

MuPAD

MuPAD

```
delete x,y,z;
f := (x,y,z) -> x^2+x*y^2+z^2*x;
gradient(f(x,y,z),[x,y,z]);
hessian(f(x,y,z), [x,y,z]);

linalg::isPosDef(Matrix)
```

Übungen

- Relative und absolute Minima und Maxima & Sattelpunkte der Funktionen
  - $f_1(x, y) = \sin(x + y)$
  - $f_2(x, y) = x^2y^2 - y^2 + x$
  - $f_3(x, y) = 6x + 3y^2 - 0.1x^2 - \frac{1}{4}y^4$
  - $f_4(x, y, z) = 2\sin(x) + xz^2 + 5y$

Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$

- Wiederholung: Integrale im $\mathbb{R}^2$
  - Integral entspricht Flächeninhalt (im Regelfall)
  - Komplexere Funktionen wurden durch Rechtecke angenähert
- $\mathbb{R}^3$
  - Integral entspricht Volumen
  - Komplexere Funktionen werden durch Quader/Objekte im $\mathbb{R}^3$ angenähert

Wiederholung Integrationsmethoden

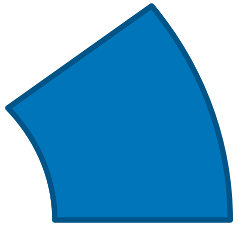
- Substitution
  - Vor allem, wenn durch die Ableitung einige Teile rausfliegen können
  - z.B. Stammfunktion von $f_1(x) = \sin^2(x) * \cos(x)$
- Partialbruchzerlegung
  - Bei Quotienten mit nicht-linearen Brüchen
  - z.B. $f_2(x) = \frac{1}{x^2-1}$
- partielle Integration
  - z.B. $f_3(x) = x * \sin(x)$

- Siehe https://tutorium.sisch.website/presentation.php?content=integralrechnung

Flächenelement 2

- Bei kartesischen Koordinaten: Rechteck
- Bei Polarkoordinaten: Kreisbogen

- Wichtig: Zum Ausgleich notwendig
  - $dx\,dy \;\rightarrow \boldsymbol{r}\,dr\,d\varphi$



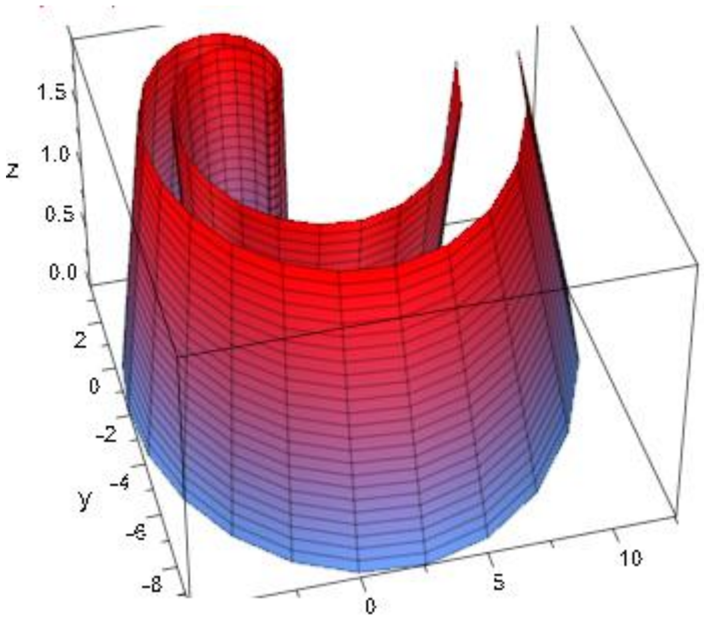
Dreifachintegrale

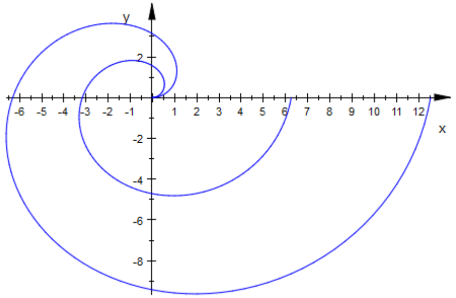
- Integrale über ein Volumen
- dV: Volumenelement, in Kartesischen Koordinaten: $dxdydz$
- Beispielsweise

$$\iiint_U f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_{x=a}^{b} \int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z=z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,dy\,dx$$

Zylinderkoordinaten

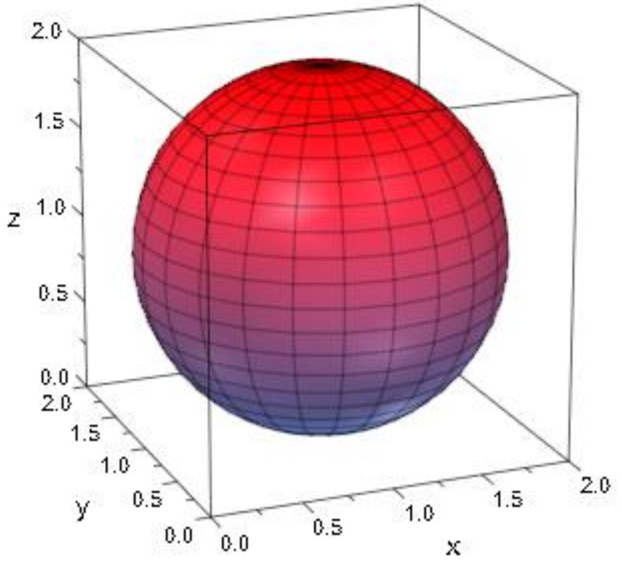
- Wie Polarkoordinaten, aber mit z-Komponente
- Variablen: $\varphi, r, z \;\rightarrow\; dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$





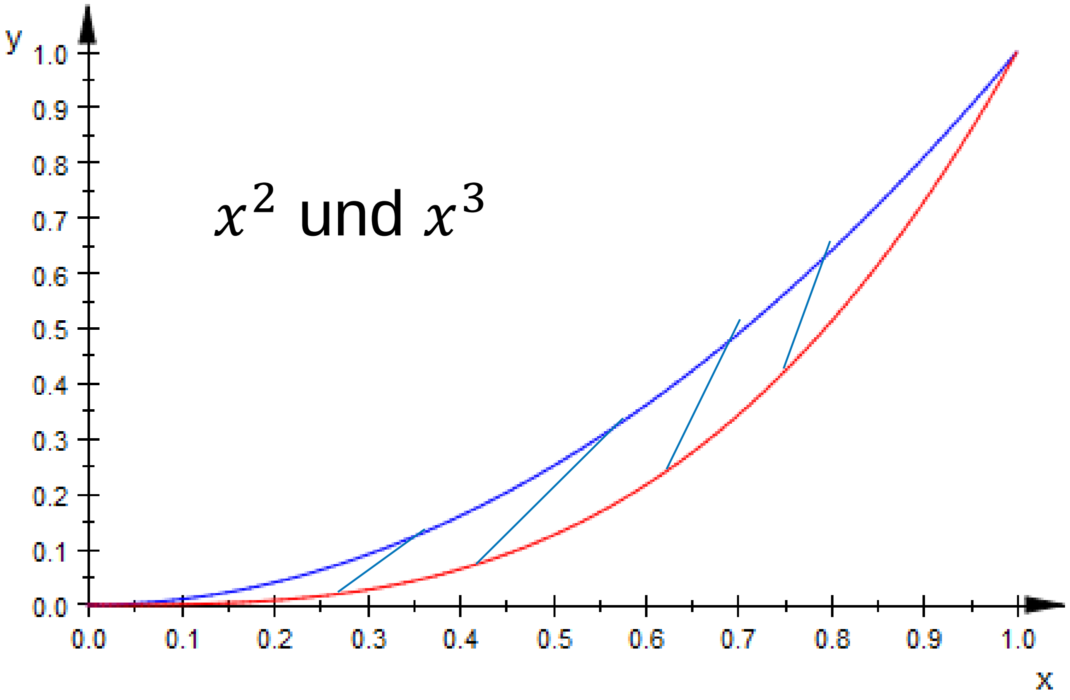
Kugelkoordinaten

- Angabe von φ, θ, r
- Volumenelement $dV = r^2 \sin(\theta)\, dr\, d\varphi\, d\theta$



$$\iiint_B f\, r^2 \sin(\theta)\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

Übungen



Integral des Bereichs über x

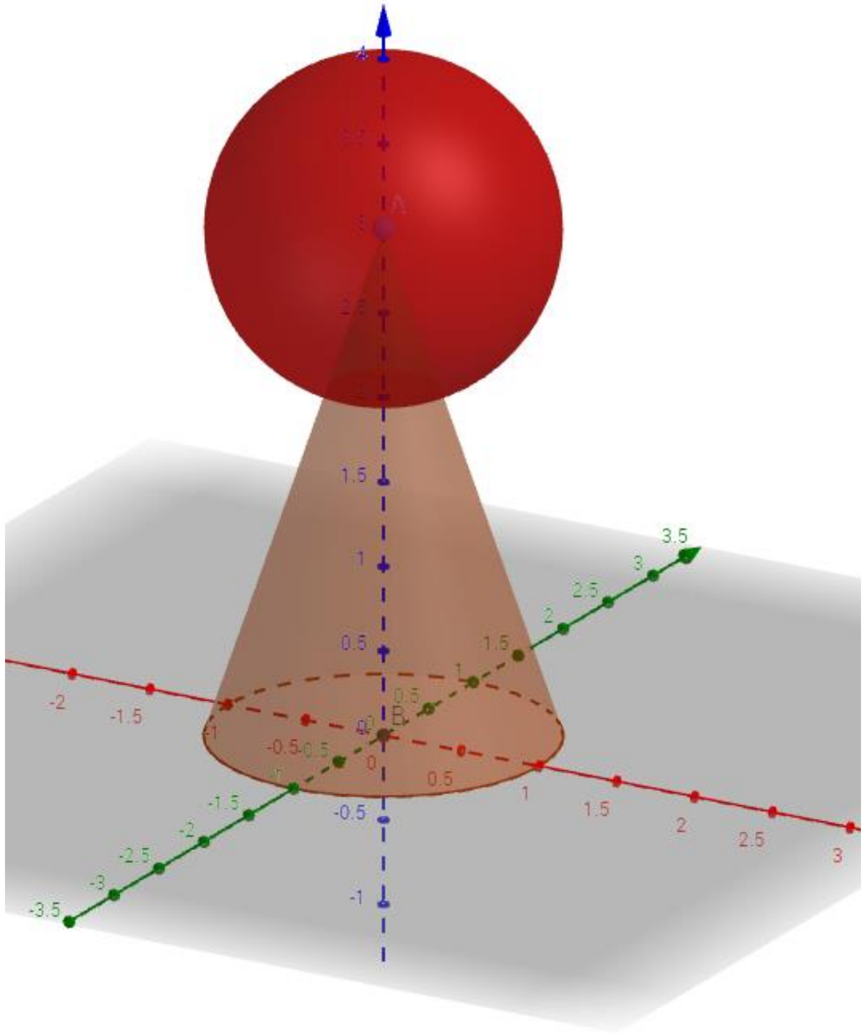
Übungen

- Volumen dieses Gebildes:

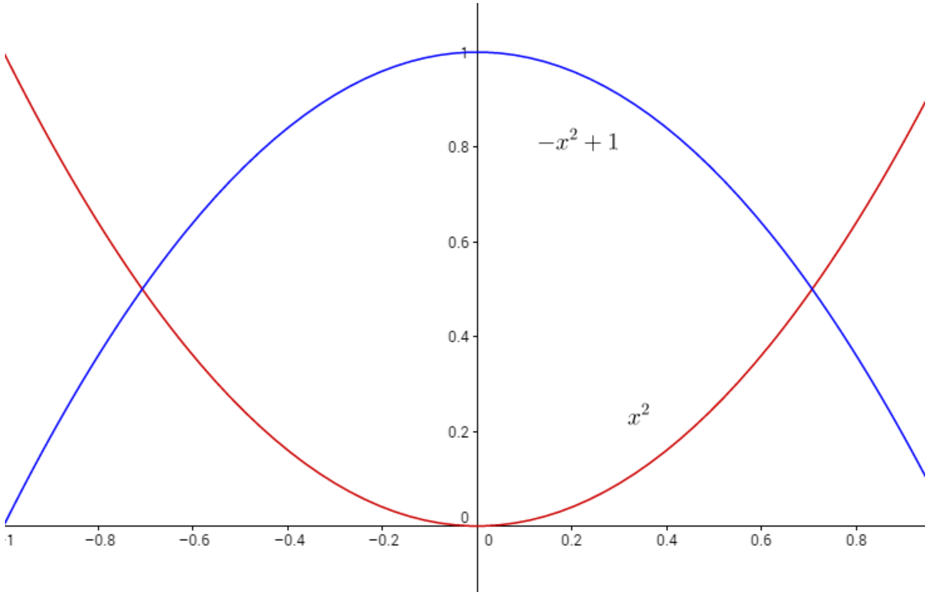
Radius der Kugel: 1

Mittelpunkt der Kugel $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Kegelspitze = Mittelpunkt der Kugel
Radius der Bodenplatte des Kegels: 1



Übungen



$$\int\int x^2 dA$$

B: von den Funktionen eingeschlossener Bereich

$$\int_{x=-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{y=x^2}^{-x^2+1} x^2 dy\, dx = \int_{x=-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} [x^2 y]_{y=x^2}^{-x^2+1}\ dx$$

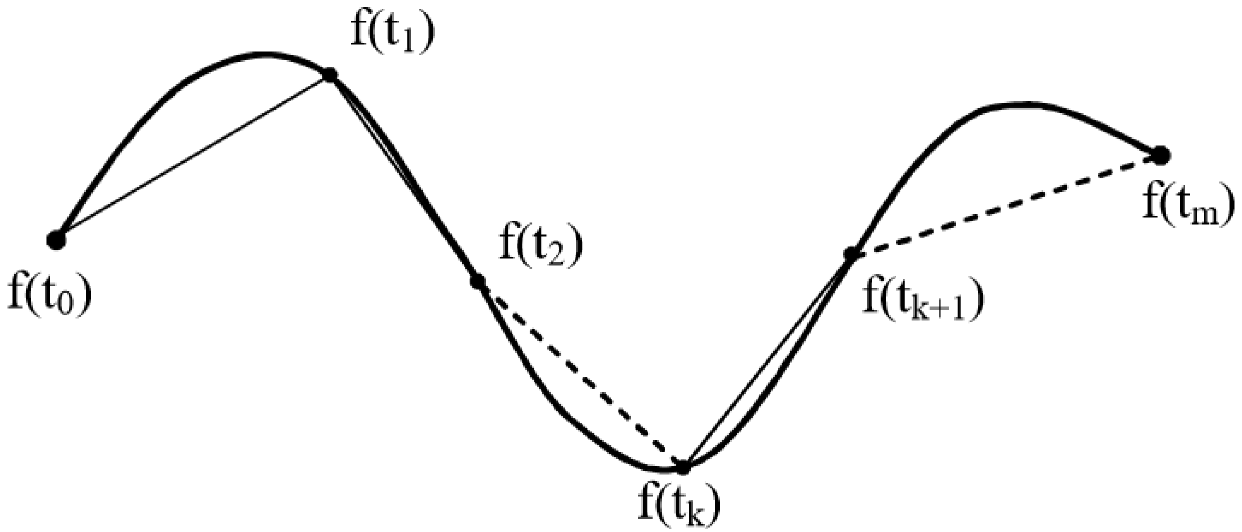
Kurven im $\mathbb{R}^n$

- Normal: Funktion $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}\right), a_i \leq x_i \leq b_i$
- Anschaulich: Einem x-Wert können mehrere y-Werte zugewiesen werden
- Formal: $K = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \middle| \vec{x} = f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, t \in I \right\}$
- K ist die Kurve, f die Parameterdarstellung der Kurve

Normale Funktionen als Kurve

- Wie stellt man $y = e^x$, $x \in [0,2]$ als Kurve dar?
- $K = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \middle| \vec{x} = f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, t \in I \right\}$
- $K = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \middle| \vec{x} = f(t) = \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}, t \in [0,2] \right\}$
- Oder auch $K = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \middle| \vec{x} = f(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ e^{2t} \end{pmatrix}, t \in [0,1] \right\}$
- → Parameterdarstellung nicht eindeutig!
- Unterschied, ob von a nach b oder umgekehrt

Bogenlänge



$$L(K) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(f_i'(t)\right)^2}\, dt$$

=> Integral über Betrag der Ableitung

Bogenlänge: einfachere Spezialfälle

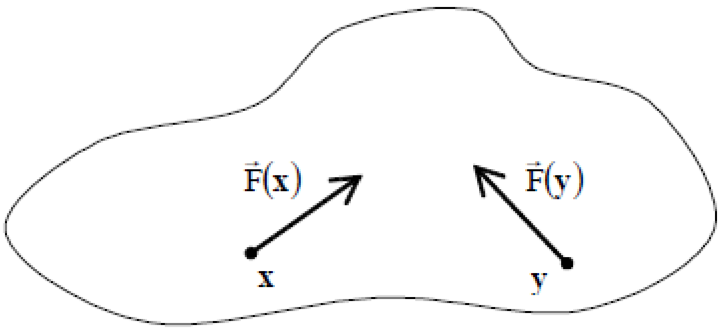
- Kartesische Funktionsdarstellung
  - Für eine Kurve in der Form $\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}, a \leq x \leq b$ gilt:
  - $s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$
- Polardarstellung
  - $\vec{f} = \vec{f}(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos(\varphi) \\ r(\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix}$, wobei $r = r(\varphi), a \leq \varphi \leq b$
  - $s = \int_a^b \sqrt{\left(\dot{r}(\varphi)\right)^2 + \left(r(\varphi)\right)^2}\; d\varphi$

Übung Bogenlänge

- $f_1(x) = x^2, x \in [0,2]$: MuPAD
- $f_2(x) = \sin(x), x \in [0,2\pi]$: MuPAD

Vektorfeld

- Jedem Punkt einer Menge ist ein Vektor zugeordnet (z.B. eine Kraft)
  - Es gibt auch Skalarfelder (jedem Punkt ist ein Skalar (eine Zahl) zugeordnet)
- z.B. Kurve, bei der jedem Punkt der zugehörige Tangentenvektor zugeordnet ist



- Bezeichnung: $F = \vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_n \end{pmatrix}$

Kurvenintegral

- z.B. Arbeit einer Kraft längs einer Kurve
  - Arbeit, die man verrichten muss, um entlang dieser Kurve zu kommen
- Berechnung: $\int_K \vec{F}(\vec{x})dx = \int_a^b \vec{F}\big(f(t)\big) \cdot \overrightarrow{f'}(t)\, dt$, wobei:
  - $\vec{F}$: Vektorfeld
  - $\mathrm{f} = \vec{f} = \begin{pmatrix} \mathrm{f}_1 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}$: Parameterdarstellung der stückweisen glatten Kurve $K \subset \mathbb{R}^n$
  - „Kurvenintegral von $\vec{F}$ längs der Kurve K.“

Greenscher Satz

- Kurven, die den Rand einer Fläche ($\mathbb{R}^2$) repräsentieren, lassen sich auch als Flächenintegral darstellen
  - $\vec{F}(x) = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, G \subseteq U,$ wobei G mit Rand
    - Falls G ein geschlossenes Gebiet ist und den Rand beinhaltet

$$\oint_{\partial \mathbf{G}} \vec{\mathrm{F}}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \iint_{G} \left\{ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right\} \mathrm{d}(x, y) = \oint_{\partial G} F_1\, \mathrm{d}x + F_2 \mathrm{d}y$$

  - Hierbei wird G **entgegen** dem Uhrzeigersinn durchlaufen

Übung Kurvenintegral

- Die Kurve hat eine Dreiecksform, sie verläuft zuerst entlang der Geraden von $(0{,}0)$ bis $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, danach entlang der Geraden von $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ bis $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, dann von dort zurück nach $(0{,}0)$.
  - Berechnen Sie das Kurvenintegral über dem Vektorfeld $F(x, y) = \begin{pmatrix} y - \sin x \\ -x \end{pmatrix}$

Potential, Potentialfeld

- Gibt es eine Funktion $\varphi(\vec{x})$, für das gilt: $grad\ \varphi(\vec{x}) = \vec{F}$, dann nennt man φ Potential und $\vec{F}$ Potentialfeld (konservatives Vektorfeld, Gradientenfeld)

- Wann Potentialfeld?: Lemma von Poincaré (S.155)
  - Falls $\frac{\delta \overrightarrow{F_i}}{\delta x_j}(\vec{x}) = \frac{\delta \overrightarrow{F_j}}{\delta x_i}(\vec{x})$ gilt für alle i,j, und U sternförmig, dann ist $\vec{F}$ ein Potentialfeld
  - Potentialfunktion durch Integration: zu beachten sind die freien Variablen
    - Die entstehende Integrationskonstante wird zu einer Funktion, die von den anderen Variablen abhängen kann

Übungen Potentialfeld

- Ist $\vec{F} = \begin{pmatrix} 2x + y^2 \\ 2xy \\ z \end{pmatrix}$ ein Potentialfeld?
  - Ja, mit $\varphi(\vec{x}) = x^2 + xy^2 + \frac{z^2}{2}$

Oberflächen

- Fläche in Parameterdarstellung allgemein
  - $f(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}, S = \left\{ f(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}; u,v \in U \right\}$
    - f ist die Parameterdarstellung der Fläche
    - Entspricht Kurve, nur mit einer Variablen mehr
  - Wichtig: Normalenvektor: $\vec{N}(u,v) = \frac{\overrightarrow{f_u}(u,v) \times \overrightarrow{f_v}(u,v)}{\left|\overrightarrow{f_u}(u,v) \times \overrightarrow{f_v}(u,v)\right|}$
    - Normalenvektor von S im Punkt $\vec{f}(u,v)$ bezüglich der Parameterdarstellung $\vec{f}$.
    - Ist Richtungsabhängig, $\overrightarrow{N^*} = -\vec{N}$ ist ebenfalls Normalenvektor

Oberflächenberechnungen

- Darstellung der Oberfläche in Parameterdarstellung oder durch mehrere Parameterdarstellungen (z.B. bei Kugel)
- Einfaches Anwenden der Formel auf S.163

Sei $S = \left\{ \vec{f}(u,v) \,\middle|\, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in U \right\}$ eine Fläche im IR^3, wobei $U \subseteq \mathrm{IR}^2$ ein kartesischer oder polarer Normalbereich sei. Dann heißt der Wert des Integrals

$$\iint_S d\sigma := \iint_U \left\| \vec{f}_u(u,v) \times \vec{f}_v(u,v) \right\| \cdot d(u,v)$$ der „*Oberflächeninhalt*" oder kurz „*Flächeninhalt*"

von S.

- Sonderfälle beachten

Ist die Fläche S in sog. „expliziter" Form dargestellt, d. h. ist S das Schaubild einer stetig differenzierbaren Funktion $g : U \to \mathrm{IR}$, d. h. $S = \left\{ \vec{f}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ g(u,v) \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in U \right\}$, dann

gilt für den Oberflächeninhalt: $\iint_S d\sigma = \iint_U \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2} \cdot d(u,v)$.

Oberflächenintegral

- Bei Oberflächenintegral genau das gleiche (S.165)

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche dargestellt durch die Parameterdarstellung $\vec{f} : U \to \mathbb{R}^3$ mit einem Normalbereich $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Sei $G : S \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann heißt das Integral

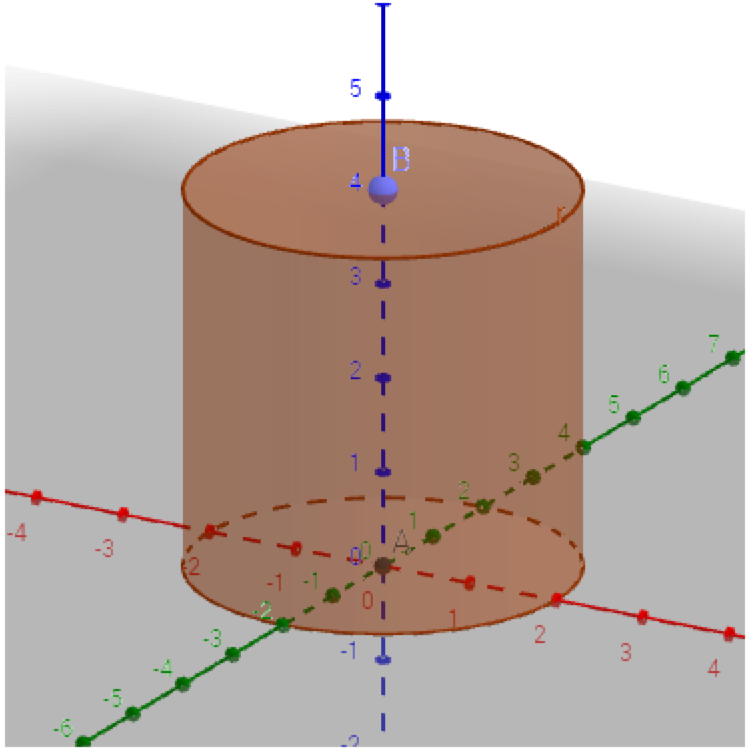
$$\iint_S G \, d\sigma := \iint_U G(f(u,v)) \cdot \left\| \vec{f}_u(u,v) \times \vec{f}_v(u,v) \right\| \cdot d(u,v)$$

das „*Oberflächenintegral von G über der Fläche S*“.

  - Lässt sich bei expliziter Form genauso vereinfachen wie Oberflächeninhalt

Übungen

- Oberflächenintegral des folgenden Zylindermantels über $x^2 + y^2$



$$h = 4$$

Mittelpunkt der Bodenplatte: Ursprung

Flussintegrale

- Auch „nur“ bestimmtes Oberflächenintegral
- Richtung beachten! (+/-)
- Oft durch Gaußschen Satz berechenbar
- Berechnung mit Bemerkung auf S. 169

$\iint\limits_S (\vec{F} \cdot \vec{N}_0) d\sigma = \pm \iint\limits_U (\vec{F}(\vec{f}(u,v)) \cdot (\vec{f}_u(u,v) \times \vec{f}_v(u,v)) \cdot d(u,v)$. Das Vorzeichen $\pm$ gibt die Richtung des Normalenvektors an. Möchten wir das Flussintegral aus der Fläche heraus (bzw. hinein) berechnen und zeigt der Normalenvektor

$$\vec{N}(u,v) = \frac{\vec{f}_u(u,v) \times \vec{f}_v(u,v)}{\left\|\vec{f}_u(u,v) \times \vec{f}_v(u,v)\right\|}$$

in die falsche Richtung, d.h. in die Fläche hinein (bzw. heraus), so ist $\vec{N}(u,v)$ durch $-\vec{N}(u,v)$ zu ersetzen.

Gaußscher Satz

SATZ 1: (DER GAUßSCHE SATZ)

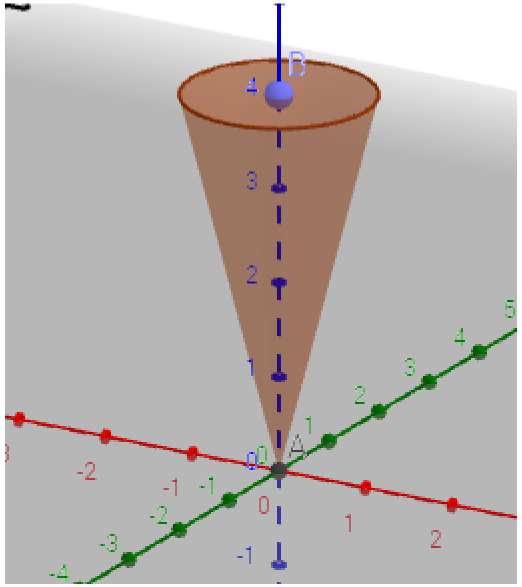
Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ein abgeschlossenes Gebiet , das von einer geschlossenen Fläche S berandet wird. Es sei $\vec{F} : B \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. $\vec{N}$ sei der auf S äußere (d.h. nach außen gerichteter) Normalenvektor. Dann gilt:

$$\iint_S (\vec{F} \cdot \vec{N})\, d\sigma = \iiint_B \operatorname{div} \vec{F}(x,y,z)\, d(x,y,z)\,.$$

- wichtig

Übungen

- Fluss aus dem Kegel
  mit $\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$
- Fluss in den unteren Einheitshalbkreis ($MP_K:\vec{0}$)
  $\vec{F} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}$



Quellen

- Erstellt von Simon Schweizer im Rahmen des Analysis 2 –Tutoriums der Medizinischen Informatik an der Hochschule Heilbronn / Universität Heidelberg
- Die Grafiken stammen, sofern sie nicht selbst erstellt sind, aus dem Analysis 2 – Skript von Prof. Dr. Laun, Hochschule Heilbronn