Medizinische Informatik

Universität Heidelberg

Hochschule Heilbronn

Hochschule Heilbronn

TECHNIK WIRTSCHAFT INFORMATIK

lineare Differentialgleichungen

Version aus dem letzten Jahr, wird noch überarbeitet ;)

Campus Heilbronn Hochschule Heilbronn, Medizinische Informatik, Simon Schweizer, simon-tobias.schweizer@hs-heilbronn.de

Gleichungen zur Bestimmung einer unbekannten Funktion y

- Allgemein (linear):
  $$\mathrm{a_n}(\mathrm{x})y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = f(x)$$
  mit beliebigen Funktionen von x a_n
- Wenn $f(x)$ = 0 : homogene Diff.-Gleichung
- nicht linear, wenn z.B. $\ln(y')$, y'^2 oder $y * y'$
- Lösung ist eine Gleichung für y, welche die Diff.-Gleichung für jeden Wert von x erfüllt
- Wenn y eine Lösung einer homogenen Dgl. ist, dann auch $cy, c \in \mathbb{R}$
- Wenn y_1 und y_2 Lösungen einer homogenen Dgl. Sind, dann auch $y_1 + y_2$

Grundsätzliches Vorgehen

- Immer erst die zugehörige homogene Diff.-Gleichung lösen, dann eine spezielle Lösung finden
- $y = y_h + y_0$
  (homogene Lösung + spezielle Lösung)
  →allgemeine Lösung (mit Konstanten)
- bei eingesetzten Anfangsbedingungen:
  spezielle Lösung

linear, homogen, 1. Ordnung

- kein allgemeines Verfahren, nur für Spezialfälle
- Wenn $y' = g(x) * h(y)$ dann durch Trennung der Variablen und anschließende Integration
  Ersetzen von y' durch $\frac{dy}{dx}$: $\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$
  $\Leftrightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$ und Auflösen nach y
- Wenn $y' + a(x) * y = 0 : y = c * e^{\int -a(x)dx}$
  da: $y' = -y * a(x)$

linear, inhomogen, 1. Ordnung

- Wenn $y' + a(x) * y = f(x)$ dann ist $y = y_h + y_0$:
- y_h ist die Lösung der zugehörigen homogenen Dgl.
- y_0 ist eine spezielle Lösung:

$$y_0 = C(x) * e^{-\int a(x)dx}, C(x) = \int f(x) * e^{\int a(x)dx}\,dx$$

- Wiederholung: Integration durch
  - Substitution (z.B. von $\int a(x)\,dx$)
  - partielle Integration ($f(x)$ ist in der Regel abzuleiten)
  - Partialbruchzerlegung (hier i.d.R. nicht benötigt)

linear, inhomogen, 1. Ordnung Spezialfälle

- $y' + a(x) * y = f(x)$ mit $a(x) = a$:
  $$y' + a * y = f(x)$$
  hat die homogene Lösung $y = ce^{-ax}$
- abhängig vom Typ von $f(x)$ ist y_0

Rechte Seite f(x)	Lösungsansatz y_s
Polynom vom Grad $n \geq 0$: $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$	$y_s = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$.
$f(x) = A \sin(\omega x)$ oder $f(x) = B \cos(\omega x)$ oder $f(x) = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x)$	$y_s = C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x)$ oder $y_s = C \sin(\omega x + \varphi)$
$f(x) = A \exp(bx)$	$y_s = \begin{cases} C \exp(bx) & \text{, falls } b \neq -a \\ C\ x \exp(bx) & \text{, falls } b = -a \end{cases}$

linear, homogen, 2. Ordnung

- Form: $y'' + ay' + by = 0$
- Darstellung als quadratische Gleichung:
$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$
- Lösen der Gleichung: λ_1 und λ_2
  - $\lambda_1 \neq \lambda_2 : y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
  - $\lambda_1 = \lambda_2 : y = (C_1 x + C_2) e^{\lambda_1 x}$
  - $\lambda_1 \wedge \lambda_2 \notin \mathbb{R} : \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$
  $$y = e^{i\alpha}(C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x))$$
  - $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

linear, inhomogen, 2. Ordnung

werden wir vermutlich nie so anwenden (müssen)

- abhängig von λ_1 und λ_2
  - $\lambda_1 \neq \lambda_2 \colon y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

$$= \frac{-\exp(\lambda_1 x)}{\lambda_2 - \lambda_1} \int \exp(-\lambda_1 x) f(x)\,dx + \frac{\exp(\lambda_2 x)}{\lambda_2 - \lambda_1} \int \exp(-\lambda_2 x) f(x)\,dx$$

  - $\lambda_0 := \lambda_1 = \lambda_2 \colon y_h = (C_1 x + C_2) e^{\lambda_1 x}$

$$= -\exp(\lambda_0 x) \int x \exp(-\lambda_0 x) f(x)\,dx + x \exp(\lambda_0 x) \int \exp(-\lambda_0 x) f(x)\,dx$$

  - $\lambda_1 \wedge \lambda_2 \notin \mathbb{R} \colon \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$

$$y_h = e^{i\alpha}(C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x))$$

$$= \frac{1}{\omega} \exp(\alpha x) \sin(\omega x) \int \exp(-\alpha x) \cos(\omega x) f(x)\,dx$$

$$- \frac{1}{\omega} \exp(\alpha x) \cos(\omega x) \int \exp(-\alpha x) \sin(\omega x) f(x)\,dx$$

linear, inhomogen, 2. Ordnung

- einfachere Spezialfälle auf S.181

Rechte Seite f (x)	Lösungsansatz y_s
I. Polynom vom Grad n $f(x) = p_n(x)$	$y_s = \begin{cases} q_n(x) & , b \neq 0 \\ xq_n(x) & , a \neq 0, b = 0 \\ x^2 q_n(x) & , a = b = 0 \end{cases}$
II. $f(x) = A \exp(cx)$	1) c ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung $y_s = B \exp(cx)$
	2) c ist einfache Lösung der charakteristischen Gleichung $y_s = B\, x \exp(cx)$
	3) c ist doppelte Lösung der charakteristischen Gleichung $y_s = B\, x^2 \exp(cx)$

Rechte Seite f (x)	Lösungsansatz y_s
III. $f(x) = A \sin(\omega x)$ oder $f(x) = A \cos(\omega x)$ oder $f(x) = A_1 \sin(\omega x) + A_2 \cos(\omega x)$	1) $i\omega$ ist keine Lösung der charaktistischen Gleichung $y_s = B_1 \sin(\omega x) + B_2 \cos(\omega x)$ ODER $y_s = B \sin(\omega x + \varphi)$
	2) $i\omega$ ist Lösung der charaktistischen Gleichung $y_s = x\,(B_1 \sin(\omega x) + B_2 \cos(\omega x))$ oder $y_s = B\,x \sin(\omega x + \varphi)$
IV. $f(x) = p_n(x) \exp(cx) \sin(\omega x)$ oder $f(x) = p_n(x) \exp(cx) \cos(\omega x)$ oder $f(x) = p_n(x) \exp(cx) \sin(\omega x) + \tilde{p}_n(x) \exp(cx) \cos(\omega x)$ $= \exp(cx)\,(p_n(x) \sin(\omega x) + \tilde{p}_n(x) \cos(\omega x))$	1) $c + i\omega$ ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung $y_s = \exp(cx)\,(q_n(x) \sin(\omega x) + r_n(x) \cos(\omega x))$
	2) $c + i\omega$ ist einfache Lösung der charakteristischen Gleichung $y_s = x \cdot \exp(cx)\,(q_n(x) \sin(\omega x) + r_n(x) \cos(\omega x))$
	3) $c + i\omega$ ist doppelte Lösung der charakt. Gleichung (kann nur dann der Fall sein, wenn $\omega = 0$ ist) $y_s = x^2 \cdot r_n(x) \cdot \exp(cx)$

allgemeines Vorgehen

- Art der Differentialgleichung erkennen
  - linear
  - homogen
  - Ordnung
- homogene Lösung mit Formel bestimmen
- falls inhomogen: Spezialfall? → Formel anwenden
  ansonsten allgemeine Lösung verwenden

Beispielaufgaben

- Auf unsere Hochschule gehen 8000 Studierende. Es bricht eine Krankheit aus, die an einem Tag 20% der noch nicht infizierten Studierenden ansteckt. Zu Beginn (Tag 0) sind 10 Studierende infiziert. Stellen Sie eine Gleichung auf, die die Anzahl der infizierten Studierenden in Abhängigkeit der Zeit repräsentiert. (Entweder allgemein oder mit den Werten)

Beispielaufgaben Lösungen

- S: Anzahl Studierende, h: Änderungsrate (20%)
- S_0: Infizierte zu Beginn
- $k(t)$: Kranke an Tag t
- $k'(t)$: Infektionsrate $k'(t) = h * (S - k(t))$

$$\Leftrightarrow k(t) + \frac{1}{h} k'(t) = S$$

- lineare, inhomogene, DGL 1. Ordnung
  (NICHT Spezialfall a(x)=a)
- $\Leftrightarrow hk(t) + k'(t) = s * h$
- Jetzt Spezialfall anwendbar

Beispielaufgaben Lösungen

- $k_h(t) = ce^{-ht}$
- eine spezielle Lösung mit $f(x) = h * S$:
- Ansatz: $f(x)$ ist Polynom vom Grad 0 → k_0 ist ebenfalls Polynom vom Grad 0 = Konstante
- $h * k_0(t) = h * S \Leftrightarrow k_0(t) = S$
- Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$k(t) = k_h(t) + k_0(t) = ce^{-ht} + S$$

Beispielaufgaben Lösungen

- Spezielle Lösung: $k(0) = S_0$
  $ce^{-ht} + S = S_0$ mit $t = 0$
- $\Leftrightarrow c + S = S_0 \Leftrightarrow c = S_0 - S$
- $k_s(t) = (S_0 - S)e^{-ht} + S$
- mit Werten:

$$k_s(t) = -7990e^{-\frac{1}{5}t} + 8000$$

Herleitung der Gleichung
für beschränktes Wachstum.