Medizinische Informatik

Universität Heidelberg

Hochschule Heilbronn

Hochschule Heilbronn

Technik Wirtschaft Informatik

Allgemeines

Analysis 2 - Tutorium

Simon Schweizer

simon-tobias.schweizer@hs-heilbronn.de

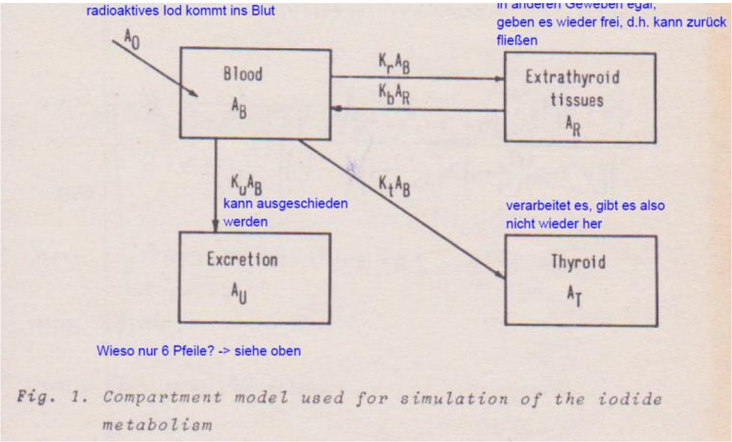
Campus Heilbronn

Inhalte

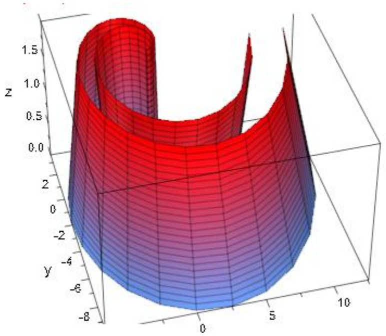
- Differentialgleichungen
- Fourierreihen (+ DFT / FFT)
- Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$
- Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$
- Kurven

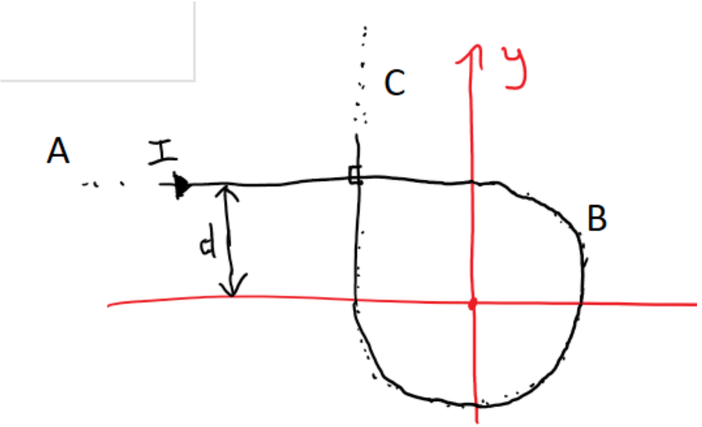
Anwendungen des Analysis 2 - Stoffes

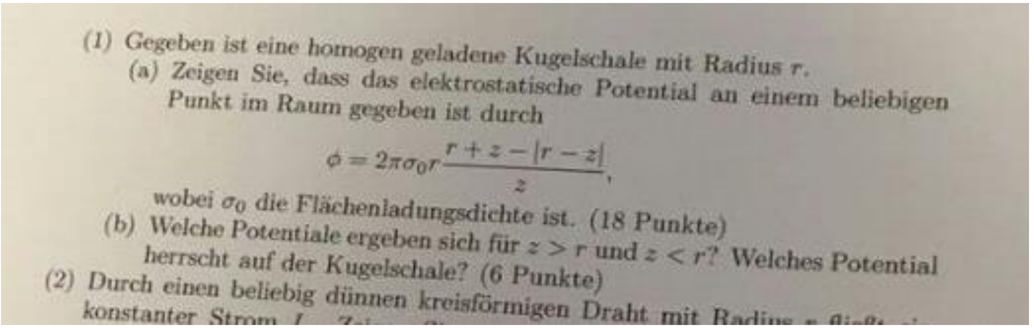
Simulation von Iod im Körper



MP3







(1) Gegeben ist eine homogen geladene Kugelschale mit Radius r.
(a) Zeigen Sie, dass das elektrostatische Potential an einem beliebigen Punkt im Raum gegeben ist durch

$$\phi = 2\pi\sigma_0 r \frac{r + z - |r - z|}{z},$$

wobei σ_0 die Flächenladungsdichte ist. (18 Punkte)
(b) Welche Potentiale ergeben sich für $z > r$ und $z < r$? Welches Potential herrscht auf der Kugelschale? (6 Punkte)
(2) Durch einen beliebig dünnen kreisförmigen Draht mit Radius
konstanter Strom

Medizinische Informatik

Universität Heidelberg

Hochschule Heilbronn

Hochschule Heilbronn

Technik Wirtschaft Informatik

Lineare Differentialgleichungen

Analysis 2 - Tutorium

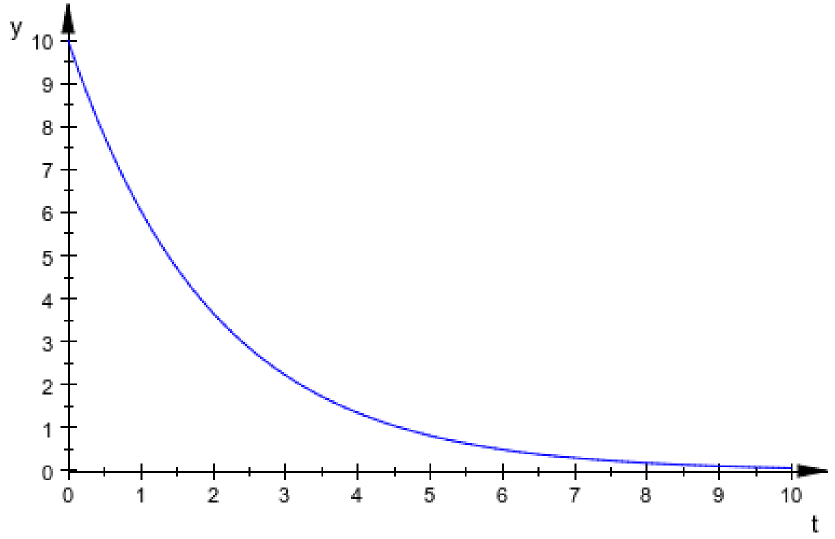
Simon Schweizer

simon-tobias.schweizer@hs-heilbronn.de

Campus Heilbronn

Wieso?

- Man hat in der Regel Kenntnisse, wie sich bspw. eine Konzentration verhält → „Abbau proportional zur vorhandenen Konzentration“
- Änderung der Konzentration: $\mathrm{c}'(\mathrm{t}) = \frac{dc}{dt} = -r * c(t)$
- In diesem Fall noch relativ einfach: $\frac{1}{c(t)} dc = -r * dt$
- Integration: $\ln|c(t)| = -rt + c$
- Auflösen des lns: $c(t) = e^{-rt+c} = L * e^{-rt}$



Gleichungen zur Bestimmung einer unbekannten Funktion y

- Allgemein (linear):
$$\mathrm{a_n}(\mathrm{x})y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = f(x)$$
mit beliebigen Funktionen von x a_n
- Wenn $f(x)$ = 0 : homogene Diff.-Gleichung
- nicht linear, wenn z.B. $\ln(y')$, y'^2 oder $y * y'$
- Lösung ist eine Gleichung für y, welche die Diff.-Gleichung für jeden Wert von x erfüllt
- Wenn y eine Lösung einer homogenen Dgl. ist, dann auch $cy, c \in \mathbb{R}$
- Wenn y_1 und y_2 Lösungen einer homogenen Dgl. Sind, dann auch $y_1 + y_2$

Grundsätzliches Vorgehen

- Immer erst die zugehörige homogene Diff.-Gleichung lösen, dann eine spezielle Lösung finden

- $y = y_h + y_0$
  (homogene Lösung + spezielle Lösung)
  →allgemeine Lösung (mit Konstanten)

- bei eingesetzten Anfangsbedingungen:
  spezielle Lösung

Beispiele

- $0 * y'(t)^2 + y(t) = 23$

- $\dot{c}(t) = -r * c(t) + 1$

linear, homogen, 1. Ordnung

- kein allgemeines Verfahren, nur für Spezialfälle
- Wenn $y' = g(x) * h(y)$ dann durch Trennung der Variablen und anschließende Integration
  Ersetzen von y' durch $\frac{dy}{dx}$: $\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$
  $\Leftrightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$ und Auflösen nach y
- Wenn $y' + a(x) * y = 0 : y = c * e^{\int -a(x)dx}$
  da: $y' = -y * a(x)$

linear, inhomogen, 1. Ordnung

- Wenn $y' + a(x) * y = f(x)$ dann ist $y = y_h + y_0$:
- y_h ist die Lösung der zugehörigen homogenen Dgl.
- y_0 ist eine spezielle Lösung:

$$y_0 = C(x) * e^{-\int a(x)dx}, C(x) = \int f(x) * e^{\int a(x)dx}\, dx$$

- Wiederholung: Integration durch
  - Substitution (z.B. von $\int a(x)\, dx$)
  - partielle Integration ($f(x)$ ist in der Regel abzuleiten)
  - Partialbruchzerlegung (hier i.d.R. nicht benötigt)

linear, inhomogen, 1. Ordnung Spezialfälle

- $y' + a(x) * y = f(x)$ mit $a(x) = a$:
  $$y' + a * y = f(x)$$
  hat die homogene Lösung $y = ce^{-ax}$
- abhängig vom Typ von $f(x)$ ist y_0

Rechte Seite f(x)	Lösungsansatz y_s
Polynom vom Grad $n \geq 0$: $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$	$y_s = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$.
$f(x) = A \sin(\omega x)$ oder $f(x) = B \cos(\omega x)$ oder $f(x) = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x)$	$y_s = C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x)$ oder $y_s = C \sin(\omega x + \varphi)$
$f(x) = A \exp(bx)$	$y_s = \begin{cases} C \exp(bx) & \text{, falls } b \neq -a \\ C\ x \exp(bx) & \text{, falls } b = -a \end{cases}$

linear, homogen, 2. Ordnung

- Form: $y'' + ay' + by = 0$
- Darstellung als quadratische Gleichung:
$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$
- Lösen der Gleichung: λ_1 und λ_2
  - $\lambda_1 \neq \lambda_2 : y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
  - $\lambda_1 = \lambda_2 : y = (C_1 x + C_2) e^{\lambda_1 x}$
  - $\lambda_1 \wedge \lambda_2 \notin \mathbb{R} : \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$
$$y = e^{i\alpha}(C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x))$$
  - $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

linear, inhomogen, 2. Ordnung

werden wir vermutlich nie so anwenden (müssen)

- abhängig von λ_1 und λ_2
  - $\lambda_1 \neq \lambda_2 : y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

$$= \frac{-\exp(\lambda_1 x)}{\lambda_2 - \lambda_1} \int \exp(-\lambda_1 x) f(x)\, dx + \frac{\exp(\lambda_2 x)}{\lambda_2 - \lambda_1} \int \exp(-\lambda_2 x) f(x)\, dx$$

  - $\lambda_0 := \lambda_1 = \lambda_2 : y_h = (C_1 x + C_2) e^{\lambda_1 x}$

$$= -\exp(\lambda_0 x) \int x \exp(-\lambda_0 x) f(x)\, dx + x \exp(\lambda_0 x) \int \exp(-\lambda_0 x) f(x)\, dx$$

  - $\lambda_1 \wedge \lambda_2 \notin \mathbb{R} : \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$

$$y_h = e^{i\alpha}(C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x))$$

$$= \frac{1}{\omega} \exp(\alpha x) \sin(\omega x) \int \exp(-\alpha x) \cos(\omega x) f(x)\, dx$$

$$- \frac{1}{\omega} \exp(\alpha x) \cos(\omega x) \int \exp(-\alpha x) \sin(\omega x) f(x)\, dx$$

linear, inhomogen, 2. Ordnung

- einfachere Spezialfälle auf S.181

Rechte Seite $f(x)$	Lösungsansatz y_s
I. Polynom vom Grad n $f(x) = p_n(x)$	$y_s = \begin{cases} q_n(x) & ,b \neq 0 \\ xq_n(x) & ,a \neq 0, b = 0 \\ x^2 q_n(x) & ,a = b = 0 \end{cases}$
II. $f(x) = A \exp(cx)$	1) c ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung $y_s = B \exp(cx)$
	2) c ist einfache Lösung der charakteristischen Gleichung $y_s = B\,x \exp(cx)$
	3) c ist doppelte Lösung der charakteristischen Gleichung $y_s = B\,x^2 \exp(cx)$

Rechte Seite f (x)	Lösungsansatz y_s
III. $f(x) = A \sin(\omega x)$ oder $f(x) = A \cos(\omega x)$ oder $f(x) = A_1 \sin(\omega x) + A_2 \cos(\omega x)$	1) $i\omega$ ist keine Lösung der charaktistischen Gleichung $y_s = B_1 \sin(\omega x) + B_2 \cos(\omega x)$ ODER $y_s = B \sin(\omega x + \varphi)$
	2) $i\omega$ ist Lösung der charaktistischen Gleichung $y_s = x\,(B_1 \sin(\omega x) + B_2 \cos(\omega x))$ oder $y_s = B\,x \sin(\omega x + \varphi)$
IV. $f(x) = p_n(x) \exp(cx) \sin(\omega x)$ oder $f(x) = p_n(x) \exp(cx) \cos(\omega x)$ oder $f(x) = p_n(x) \exp(cx) \sin(\omega x) + \tilde{p}_n(x) \exp(cx) \cos(\omega x)$ $= \exp(cx)\,(p_n(x) \sin(\omega x) + \tilde{p}_n(x) \cos(\omega x))$	1) $c + i\omega$ ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung $y_s = \exp(cx)\,(q_n(x) \sin(\omega x) + r_n(x) \cos(\omega x))$
	2) $c + i\omega$ ist einfache Lösung der charakteristischen Gleichung $y_s = x \cdot \exp(cx)\,(q_n(x) \sin(\omega x) + r_n(x) \cos(\omega x))$
	3) $c + i\omega$ ist doppelte Lösung der charakt. Gleichung (kann nur dann der Fall sein, wenn $\omega = 0$ ist) $y_s = x^2 \cdot r_n(x) \cdot \exp(cx)$

allgemeines Vorgehen

- Art der Differentialgleichung erkennen
  - linear
  - homogen
  - Ordnung
- homogene Lösung mit Formel bestimmen
- falls inhomogen: Spezialfall? → Formel anwenden
  ansonsten allgemeine Lösung verwenden

Beispielaufgaben

- Auf unsere Hochschule gehen 8000 Studierende. Es bricht eine Krankheit aus, die an einem Tag 20% der noch nicht infizierten Studierenden ansteckt. Zu Beginn (Tag 0) sind 10 Studierende infiziert. Stellen Sie eine Gleichung auf, die die Anzahl der infizierten Studierenden in Abhängigkeit der Zeit repräsentiert.
  (Entweder allgemein oder mit den Werten)

Beispielaufgaben Lösungen

- S: Anzahl Studierende, h: Änderungsrate (20%)
- S_0: Infizierte zu Beginn
- $k(t)$: Kranke an Tag t
- $k'(t)$: Infektionsrate
- $k'(t) = h * (S - k(t))$

  $$\Leftrightarrow k(t) + \frac{1}{h} k'(t) = S$$
- lineare, inhomogene, DGL 1. Ordnung
  (NICHT Spezialfall a(x)=a)
- $\Leftrightarrow hk(t) + k'(t) = s * h$
- Jetzt Spezialfall anwendbar

Beispielaufgaben Lösungen

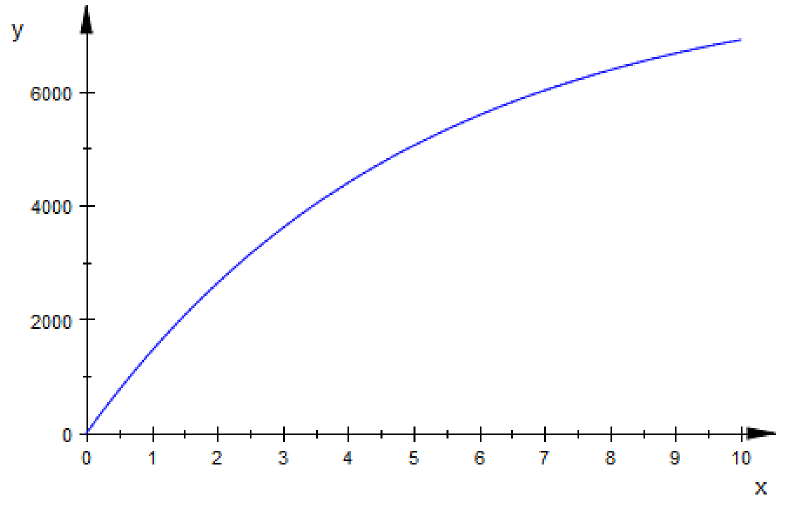
- $k_h(t) = ce^{-ht}$
- eine spezielle Lösung mit $f(x) = h * S$:
- Ansatz: $f(x)$ ist Polynom vom Grad 0 → k_0 ist ebenfalls Polynom vom Grad 0 = Konstante
- $h * k_0(t) = h * S \Leftrightarrow k_0(t) = S$
- Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$k(t) = k_h(t) + k_0(t) = ce^{-ht} + S$$

Beispielaufgaben Lösungen

- Spezielle Lösung: $k(0) = S_0$
  $ce^{-ht} + S = S_0$ mit $t = 0$
- $\Leftrightarrow c + S = S_0 \Leftrightarrow c = S_0 - S$
- $k_s(t) = (S_0 - S)e^{-ht} + S$
- mit Werten:
  $k_s(t) = -7990e^{-\frac{1}{5}t} + 8000$

Herleitung der Gleichung
für beschränktes Wachstum.



Medizinische Informatik

Universität Heidelberg

Hochschule Heilbronn

Hochschule Heilbronn

TECHNIK WIRTSCHAFT INFORMATIK

Fourierreihe

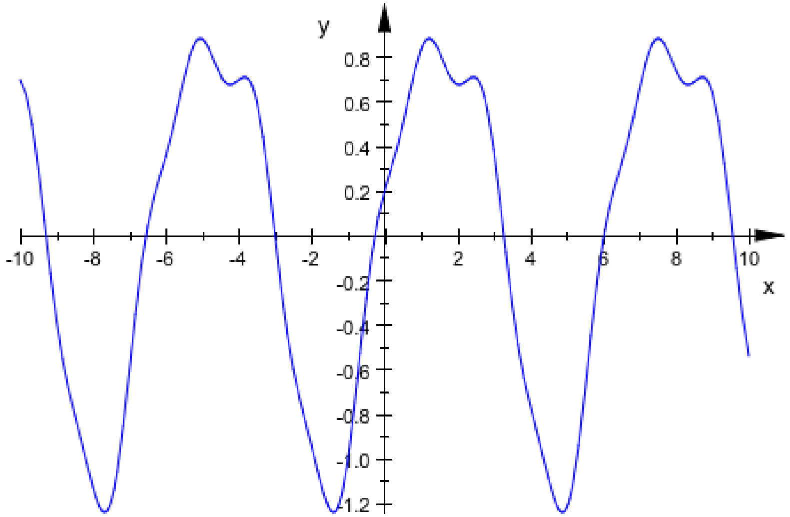
Analysis 2 - Tutorium

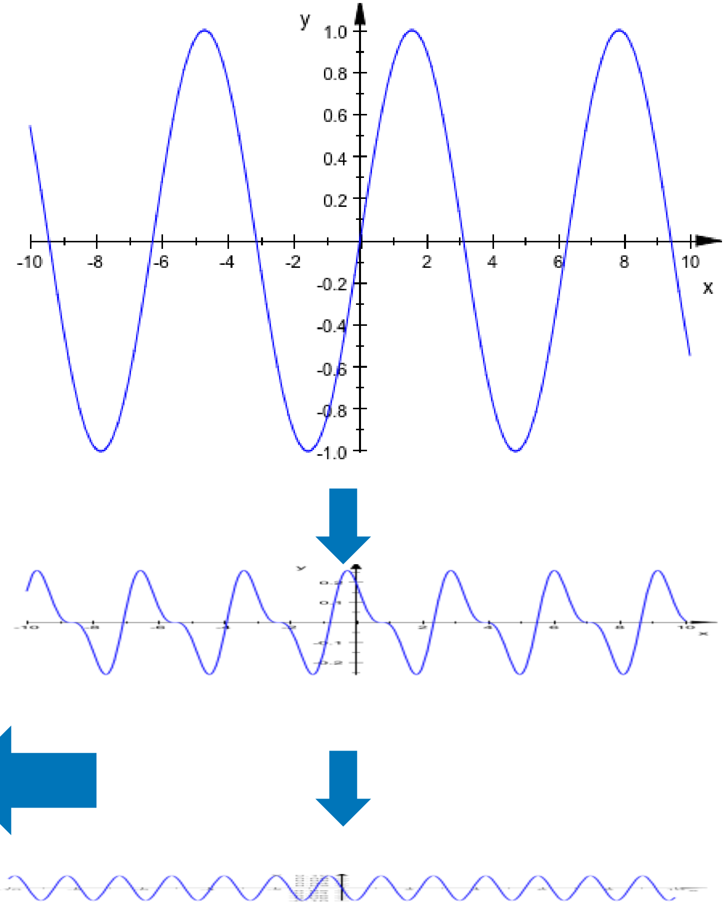
Simon Schweizer

simon-tobias.schweizer@hs-heilbronn.de

Campus Heilbronn

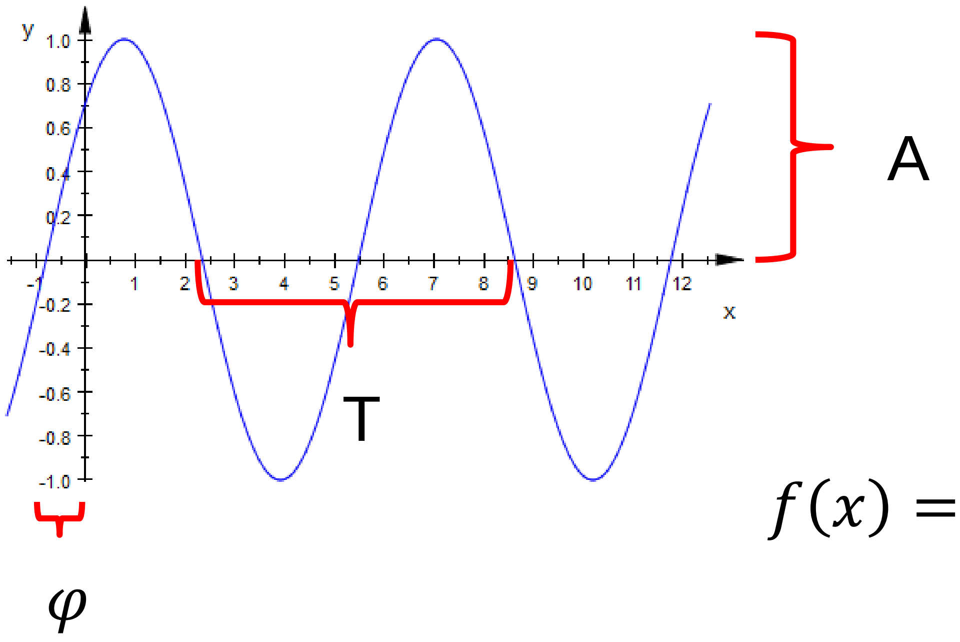
Fragestellung





Anteile mit
Periodendauer 2π, Phasenverschiebung 0, Amplitude 1
Periodendauer π, Phasenverschiebung $\frac{\pi}{2}$, Amplitude 0.2
Periodendauer $\frac{\pi}{2}$, Phasenverschiebung π, Amplitude 0.1

Schwingungen = periodische Funktionen



$$f(x) = A * \sin(2\pi f x + \varphi)$$

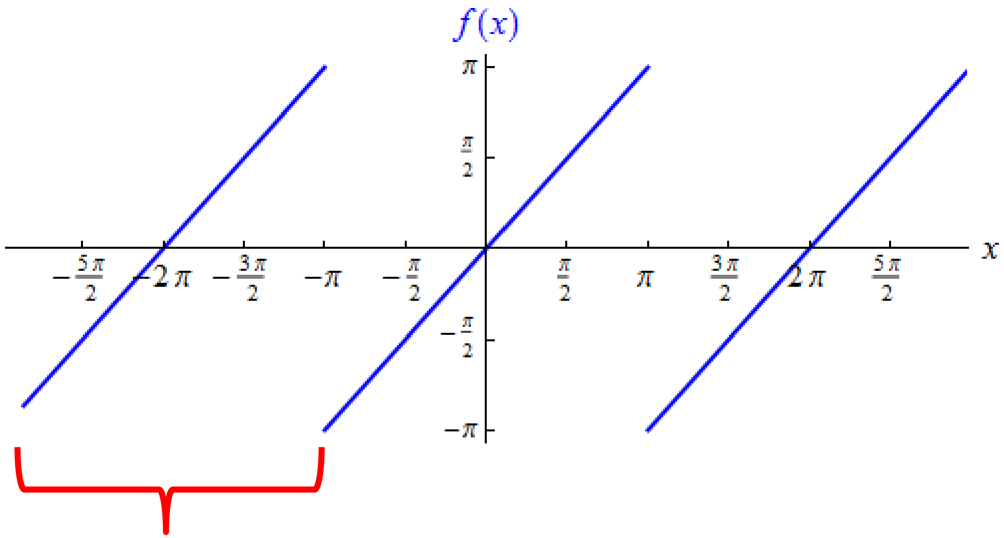
$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathrm{a} * \cos(2\pi f x)$$

mit Frequenz $f = \frac{1}{T}$

Amplitude A

Phasenverschiebung φ

periodische Funktionen



T T-periodische Funktion

$$f(x + nT) = f(x) \text{ mit } n \in \mathbb{Z}$$

Funktionen lassen sich periodisch fortsetzen

Umrechnung

- Spektraldarstellung
  - $f(x) = A * \sin(2\pi f x + \varphi)$
- Umformen mit Additionstheoremen in Fourierdarstellung
  - $f(x) = a * \cos(2\pi f x) + b * \sin(2\pi f x)$

    mit $a = A\sin(\varphi)$ und $b = A\cos(\varphi)$

    wenn $\varphi = 0 \Rightarrow a = 0 \,\&\, b = A$
    wenn $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = A \,\&\, b = 0$

$$\sin(x+y) = \sin(x) * \cos(y) + \cos(x) * \sin(y)$$

Umrechnung

$$A = \left|\binom{b}{a}\right| = \sqrt{b^2 + a^2}$$

$$a = A\sin(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{a}{A}\right)$$

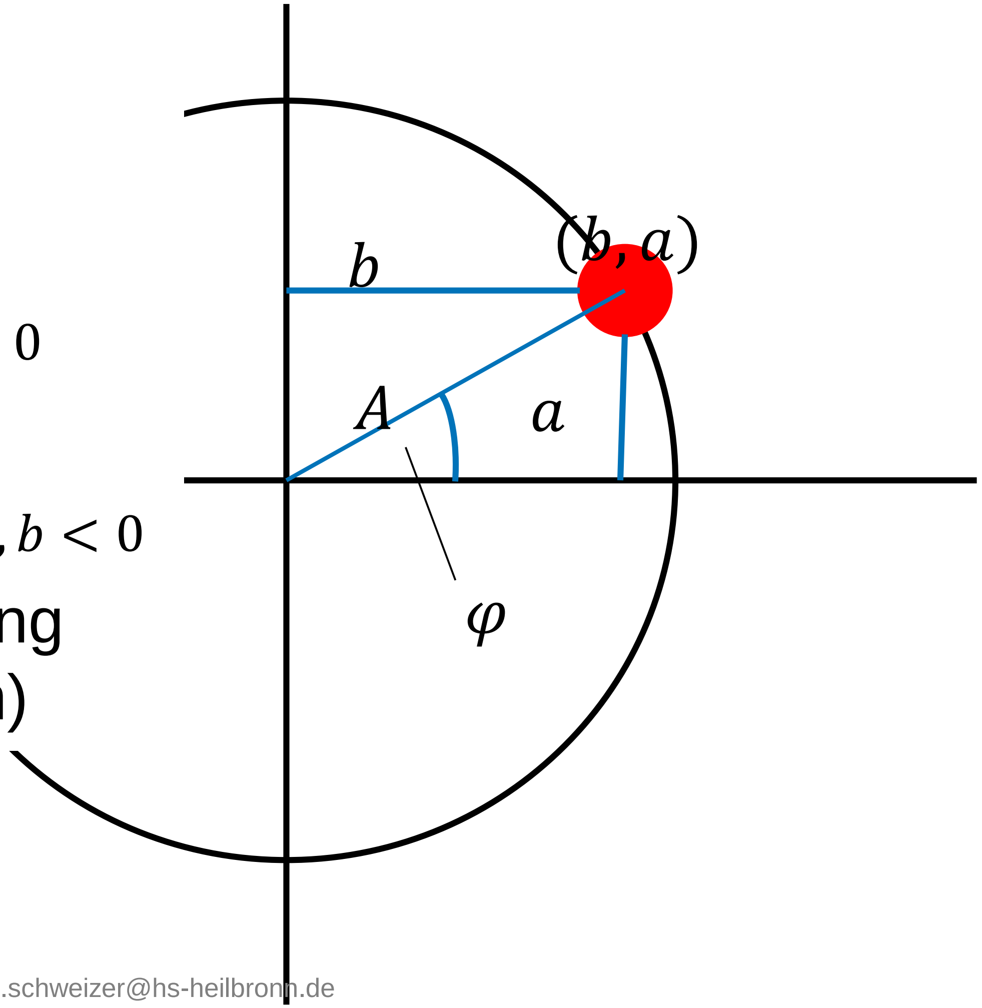
oder allgemein:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right), a > 0, b > 0$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) + \pi, \mathrm{b} < 0$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) + 2\pi, a < 0, b < 0$$

(entspricht Umrechnung bei komplexen Zahlen)



Übung

- $f_1(x) = \frac{1}{2}\sin(3x) + 2\cos(3x)$
- $f_2(x) = -4\cos\left(5x + \frac{1}{8}\pi\right)$

In Spektral- und Fourierdarstellung

$$f(x) = a * \cos(2\pi f x) + b * \sin(2\pi f x)$$

mit $a = A\sin(\varphi)$ und $b = A\cos(\varphi)$

$$A = \left|\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\right| = \sqrt{b^2 + a^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right), a > 0, b > 0$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) + \pi, \mathrm{b} < 0$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) + 2\pi, a < 0, b < 0$$

Fourierreihe (Überlagerung von Schwingungen)

- $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x))$
  - Mit $L = \frac{T}{2}$
  - Und den Fourier-Koeffizienten:
    - $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L+a}^{L+a} f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx$
    - $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L+a}^{L+a} f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\,dx$
- Fourierreihe von f: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum \ldots$
- Stellt die Funktion eventuell nicht an allen Stellen dar.

Hilfen zur Berechnung von a_n/b_n

SATZ 1:

Für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $L > 0$ gilt:

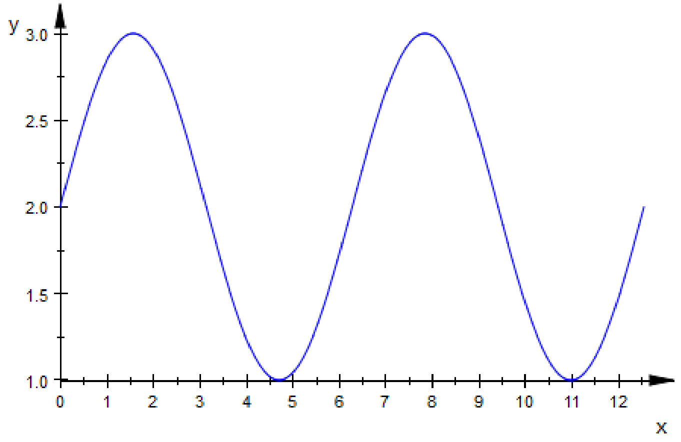
$$(1) \quad \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\cos(\frac{n\pi}{L}x)\cos(\frac{m\pi}{L}x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{, falls } n \neq m \\ 1 & \text{, falls } n = m \geq 1 \\ 2 & \text{, falls } n = m = 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{L}x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{, falls } n \neq m \\ 1 & \text{, falls } n = m \geq 1 \\ 0 & \text{, falls } n = m = 0 \end{cases}$$

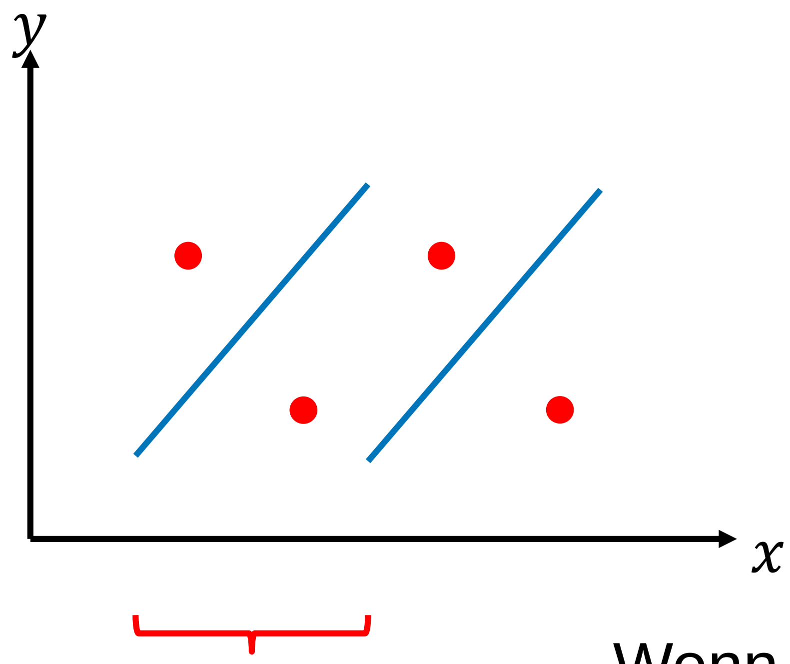
$$(3) \quad \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\sin(\frac{n\pi}{L}x)\cos(\frac{m\pi}{L}x)\,dx = 0.$$

$\frac{a_0}{2}$

- $f(x) = 1$, 2-periodisch
- $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin(\frac{n\pi}{L} x))$
  - Mit $a_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^{1} \cos(\frac{n\pi}{L} x)\, dx \Rightarrow a_0 = \int_{-1}^{1} \cos(0)\, dx = 2$
- $\frac{a_0}{2}$: Mittelwert der Funktion



Fourierreihe = Funktion?



$$F_f(x) = \frac{1}{2} * \left(f\left(x_0^+\right) + f\left(x_0^-\right)\right)$$

Wenn sie an x_0 stetig ist
(Grenzwerte und Funktionswert gleich)

Spektraldarstellung

$A = \left|\binom{b}{a}\right| = \sqrt{b^2 + a^2}$

$a = A\sin(\varphi)$

$\Leftrightarrow \varphi = \arcsin(\frac{a}{A})$

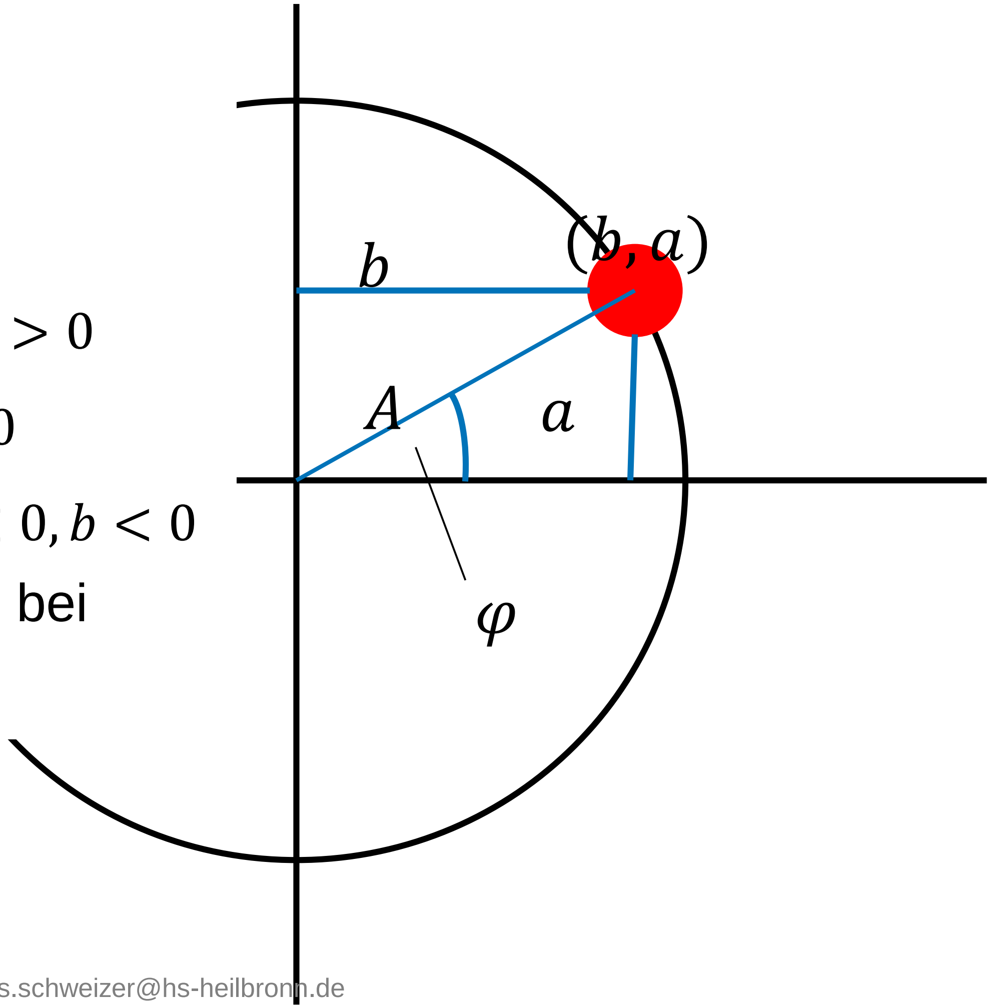
oder allgemein:

$\varphi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right), a > 0, b > 0$

$\varphi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) + \pi, \mathrm{b} < 0$

$\varphi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) + 2\pi, a < 0, b < 0$

(entspricht Umrechnung bei komplexen Zahlen)



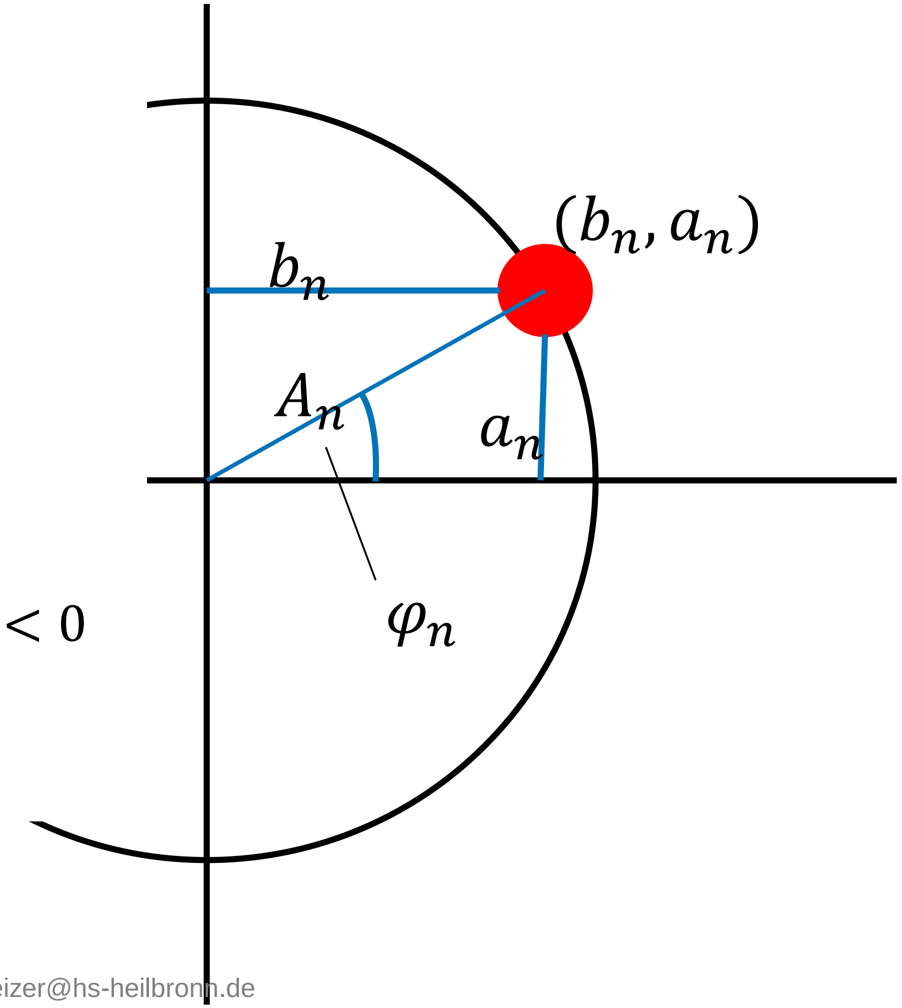
Spektraldarstellung

$$A_n = \left|\begin{pmatrix} b_n \\ a_n \end{pmatrix}\right| = \sqrt{b_n^2 + a_n^2}$$
$$a_n = A_n \sin(\varphi_n)$$
$$\Leftrightarrow \varphi_n = \arcsin(\frac{a_n}{A_n})$$
$$b_n = A_n \cos(\varphi_n)$$

oder allgemein:

$$\varphi_n = \arctan\left(\frac{a_n}{b_n}\right), a_n > 0, b_n > 0$$
$$\varphi_n = \arctan\left(\frac{a_n}{b_n}\right) + \pi, \mathrm{b_n} < 0$$
$$\varphi_n = \arctan\left(\frac{a_n}{b_n}\right) + 2\pi, a_n < 0, b_n < 0$$

(entspricht Umrechnung bei komplexen Zahlen)

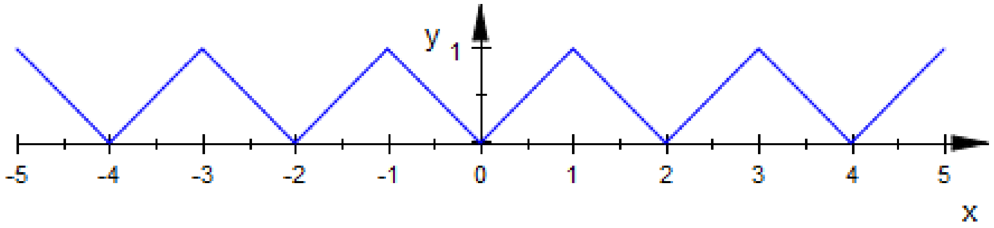


gerade / ungerade Funktionen

- wenn f eine gerade Funktion ist: $b_n = 0$
  - Gerade: $f(x) = f(-x)$
  - sin würde dafür sorgen, dass die Funktion nicht mehr gerade ist → nur cos-Anteile
- wenn f eine ungerade Funktion ist: $a_n = 0$
  - Ungerade: $f(x) = -f(-x)$
  - cos würde dafür sorgen, dass die Funktion nicht mehr ungerade ist → nur sin-Anteile

Übung

- 2-periodisch fortgesetzte Betragsfunktion
  um $x = 0$



$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin(\frac{n\pi}{L} x))$$

Mit $L = \frac{T}{2}$

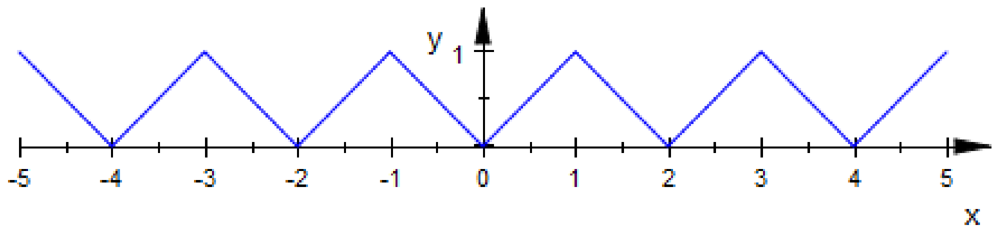
Und den Fourier-Koeffizienten:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L+a}^{L+a} f(x) \cos(\frac{n\pi}{L} x)\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L+a}^{L+a} f(x) \sin(\frac{n\pi}{L} x)\, dx$$

Lösung

- 2-periodisch fortgesetzte Betragsfunktion um $x = 0$



- Offensichtlich gerade Funktion
  - $b_n = 0$
- $a_n = \int_{-1}^{1} |x| * \cos(n\pi x)\, dx = \int_{-1}^{0} -x * \cos(n\pi x)\, dx + \int_{0}^{1} x * \cos(n\pi x)\, dx$
- $= 2\left(\left[\frac{x}{n\pi}\sin(n\pi x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\, dx\right)$
- $= 2\left(0 + \left[-\frac{1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)\right]_0^1\right) = -\frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)$
- $= \begin{cases} \frac{-4}{n^2\pi^2}, n\ ungerade \\ 0, n\ gerade \end{cases}$

a_n und b_n

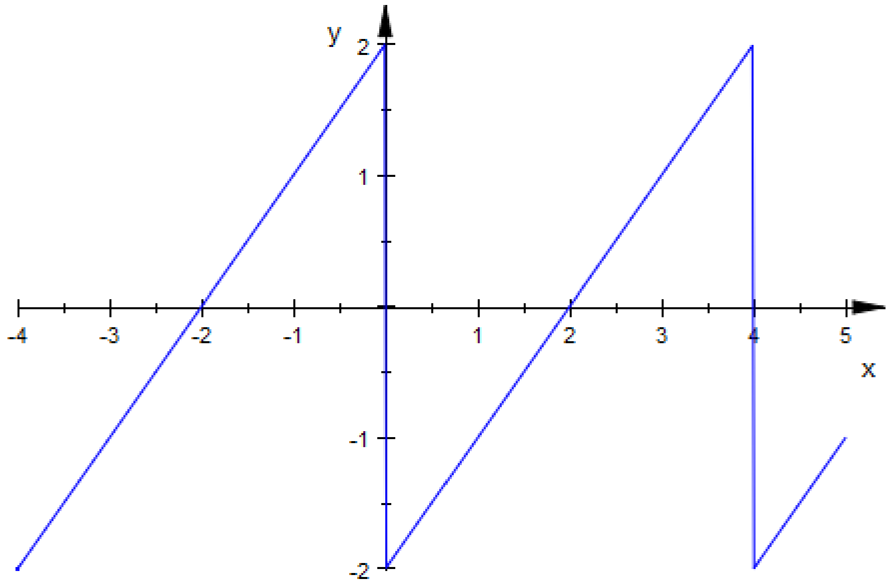
- für a_n und b_n sind die Integrationsgrenzen egal, nur das Integral muss eine Breite von T haben.
- $a_n = \frac{1}{L} * \int_{-L+a}^{L+a} \dots$
- damit auch von 0 bis $T = 2L$

Übung

- Bestimmung der zur Funktion f: $[0,4[\rightarrow \mathbb{R}$: $f(x) = x - 2$ gehörigen Fourierreihe
- Funktion ungerade → a_n sind 0
- $b_n = \frac{1}{2}\int_0^4 (x-2)\sin\left(\frac{1}{2}n\pi x\right)dx$
- $= \frac{1}{2}\left(\left[(x-2)\left(-\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{1}{2}n\pi x\right)\right)\right]_0^4 - \int_0^4 -\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{1}{2}n\pi x\right)dx\right)$
- $= \frac{1}{2}\left(-\frac{8}{n\pi} - \underbrace{\left[-\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{1}{2}n\pi x\right)\right]_0^4}_{0}\right)$
- $= -\frac{4}{n\pi}$

Lösung der Übung

- $f(x) \sim \sum_{n=1}^{N} -\frac{4}{n\pi} * \sin(\frac{n\pi}{2}x)$



komplexe Darstellung

- Darstellung von $\sin$ und $\cos$ durch e-Funktionen
- später mit Matrizen (bei der DFT) einfacher
- Wie kommt man von a_n und b_n auf ein c_n?
- $c_n e^{\frac{in\pi}{L}x} = \mathrm{c_n}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + i\, sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right)$
- Wäre $c_n = a_n - ib_n$ Problem: Imaginärteil → muss sich aufheben
- ➔ $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ + Erweiterung der Reihe, sodass sie bei $-N$ beginnt
- Verwendung bei DFT + Fouriertransformation (nicht periodischer Fkt.)

Direkte Berechnung

- $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x))$
  $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n * e^{\frac{in\pi}{L}x}$
  mit $c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-\frac{in\pi}{L}x} dx$ und $c_0 = \frac{a_0}{2}$

Umformung in andere Darstellungsformen

- $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$
  - $a_n = 2 * \Re(c_n)$ und $b_n = -2 * \Im(c_n)$
- $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|c_n|$
- φ mit a_n und b_n (siehe Folie Spektraldarstellung) oder komplex: $\arg(ic_n)$

Übung

- Umrechnung von $c_n = \frac{1}{n} e^{\frac{in\pi}{6}}$ in Fourierdarstellung (2-periodisch)
- $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$
- $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$
- $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x))$
  - Mit $L = \frac{T}{2}$
- $c_n = \frac{1}{n}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right)$
- → $a_n = \quad 2 * \Re(c_n) = \frac{2}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$
- → $b_n = -2 * \Im(c_n) = -\frac{2}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$
- $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x))$

MEDIZINISCHE INFORMATIK

UNIVERSITÄT HEIDELBERG

HOCHSCHULE HEILBRONN

HOCHSCHULE HEILBRONN

TECHNIK WIRTSCHAFT INFORMATIK

Diskrete Fouriertransformation

Analysis 2 - Tutorium

Simon Schweizer

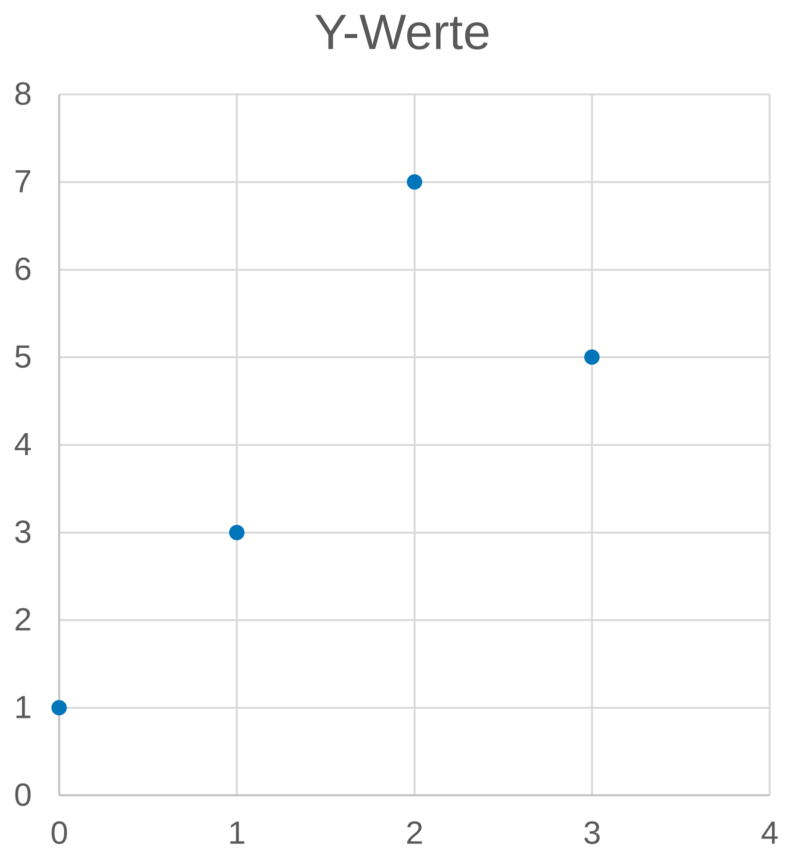
simon-tobias.schweizer@hs-heilbronn.de

Campus Heilbronn

Diskrete Fouriertransformation

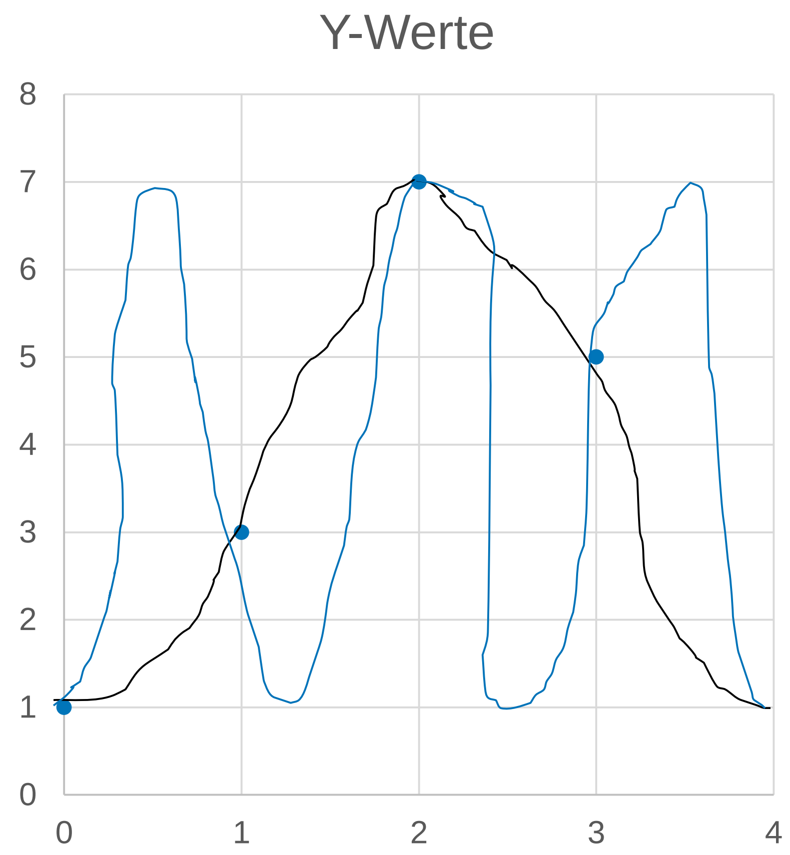
- Ziel: Bestimmung der Schwingungsgleichung (damit auch deren Frequenzen) aus Messwerten
- Auf Basis der Fourierreihe
- Problem: keine Funktion, sondern nur Messwerte:
  - Integrale können nicht mehr gebildet werden
  - → Alternative: über Riemannsche Summe (vgl. Herleitung Integral)

Aufgabenstellung grafisch



- Diese Daten in eine periodische Funktion umwandeln, die bei den Messstellen die Messwerte annimmt
- Annahme: Funktion ist 4-periodisch, d.h. f(4) = f(0)
- Erstes Ziel: Bestimmung der Koeffizienten für die Sinus-/Cosinus-Funktionen
  - Damit erhält man eine Funktion

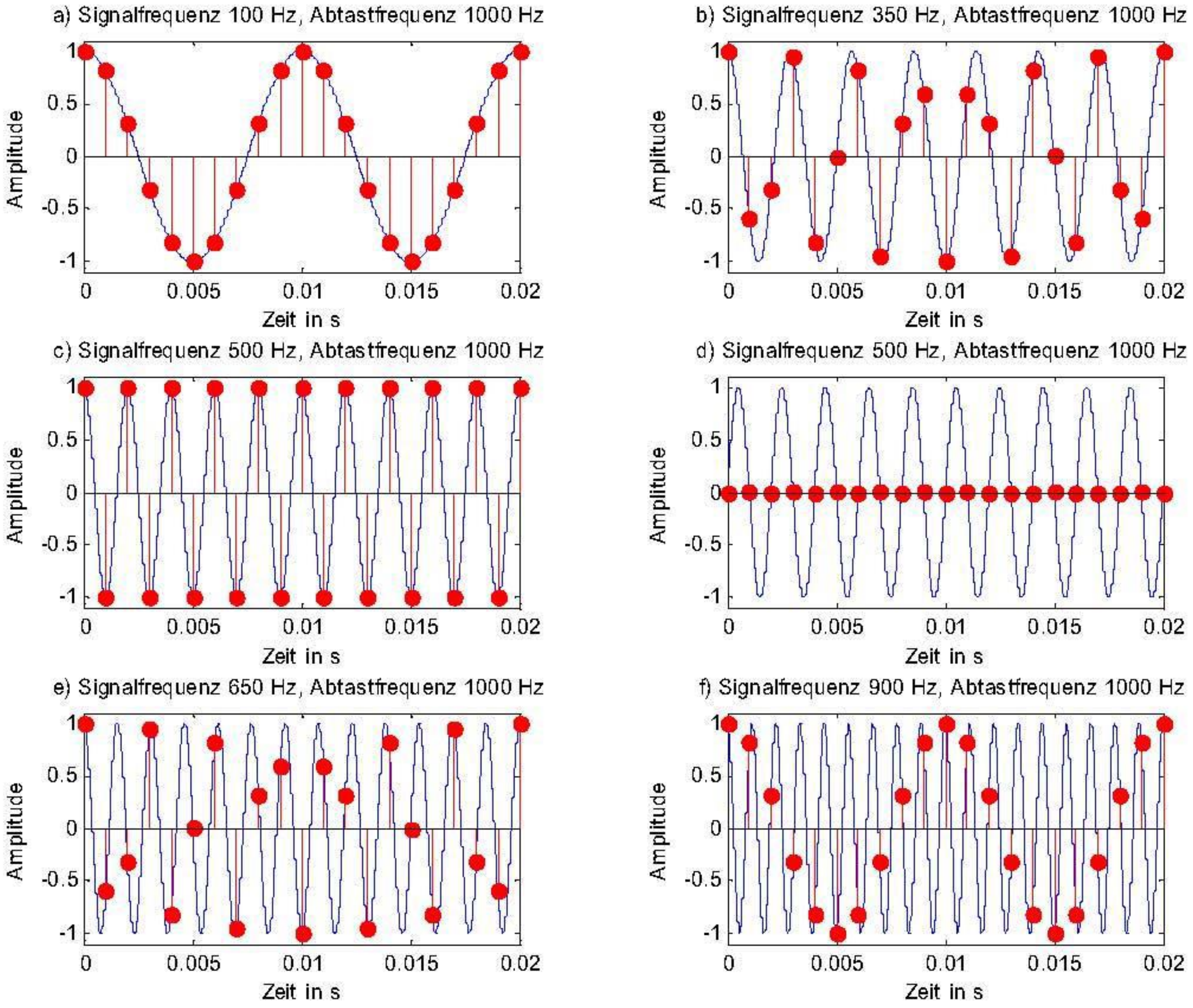
Aufgabenstellung grafisch



- Umso mehr Daten (umso mehr Messungen pro Sekunde) desto genauer kann die Annäherung sein
- Wichtig: die Funktion muss unbedingt T-periodisch sein, ansonsten keine Annäherung möglich

Nyquist-Theorem

- Abtastfrequenz muss > 2 * größte Signalfrequenz sein
  - Bei Sound: Hörspektrum bis ca. 20kHz: 44100 Samples/Sekunde (ca. 2*…)

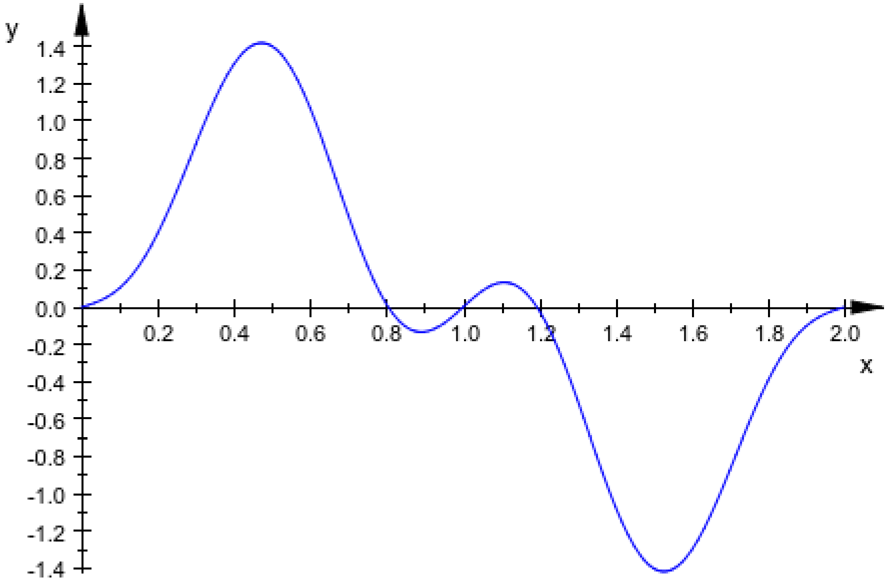


Quelle: Vorlesung „Datenübertragung“
von Prof. Dr. Wolfgang Heß

DFT

- $y_k = f(x_k)$: Abtastwerte
- x_k: Stützstellen (in unseren Fällen gleichverteilt) mit $x_k = \frac{2L}{N}k, k = 0, \ldots, N-1$, also mit dem Abstand $\frac{2L}{N}$
- Messung von 0 bis $T = 2L$
- $a_n = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)\cos(\frac{n\pi}{L}x_k)$
  $\rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)$
- $b_n = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)sin(\frac{n\pi}{L}x_k)$

Grafische Darstellung



x_k	
$y_k \approx$	

- y_k: Abtastwerte
- x_k: Stützstellen
  - Was sind die x_ks bei $N = 10$?
    - Und was die y_ks? (ca.)
      - $a_n = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) \cos(\frac{n\pi}{L} x_k)$
        $\rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)$
      - $b_n = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) sin(\frac{n\pi}{L} x_k)$

DFT in komplexer Schreibweise

- $a_n, b_n \to c_n$
- Wie bei Fourierreihen:
  - $c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)\, e^{-\frac{i\pi n}{L} x_k} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)\, e^{-\frac{i2\pi n}{N} k}$
  - $c_n = DFT\{f(x_k)\}$
- Umkehrbar (inverse diskrete Fouriertransformation):
  - $f(x_k) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n\, e^{\frac{i\pi x_k}{L} n} = \sum_{n=0}^{N-1} c_n\, e^{\frac{i2\pi k}{N} n} = IDFT\{c_n\}$

DFT

- Signalfolge: Folge der Messwerte $\left(f(x_k)\right)$, $0 \leq k \leq N-1$
- Spektralfolge: Folge von a_0, a_n, b_n, $1 \leq n \leq N-1$ oder komplex: c_n, $0 \leq n \leq N-1$
  - → Welche Frequenzen treten wie stark in der zu konstruierenden Funktion auf?
- Korrespondenzschreibweise: $f(x_k) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; c_n$

DFT - Matrizenschreibweise

- $c_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)\, e^{-\frac{i2\pi n}{N}k}$
- Definiere $w = e^{\frac{-i2\pi}{N}}$ (immer gleich, nur n, k verschieden)
- $c_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)\, w^{nk}$ $(y_k = f(x_k))$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix}}_{:=\vec{c}} = \frac{1}{N} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 & \cdots & w^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & w^n & w^{n2} & w^{n3} & \cdots & w^{n(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{(N-1)2} & w^{(N-1)3} & \cdots & w^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}}_{:=\text{Transformationsmatrix } F} \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix}}_{:=\vec{y}}$$

DFT - Matrizenschreibweise

- Kurz: $\vec{c} = \frac{1}{N} F * \vec{y}$ bzw. $\vec{y} = NF^{-1}\vec{c}$
- IDFT: mit $y_k = \sum_{k=n}^{N-1} c_n * w^{-nk}$

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \overline{w} & \overline{w}^2 & \overline{w}^3 & \cdots & \overline{w}^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \overline{w}^k & \overline{w}^{k2} & \overline{w}^{k3} & \cdots & \overline{w}^{k(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \overline{w}^{N-1} & \overline{w}^{(N-1)2} & \overline{w}^{(N-1)3} & \cdots & \overline{w}^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_k \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix}$$

DFT - Matrizenschreibweise

- Berechnung und Darstellung viel einfacher
- Beispiel:
  - $y_0 = 1, y_1 = 2 \text{ (T = 2)}$
  - Gesucht: Funktionsgleichung, die diese 2-periodische Funktion approximiert
  - $\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & w \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $w = e^{-\frac{i2\pi}{2}} = e^{i\pi} = -1$
  - $\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Beispiel Fortsetzung

- $f(x_k) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \, e^{\frac{i\pi x_k}{L} n}$
- $f(x_k) = \sum_{n=0}^{1} c_n \, e^{\frac{i\pi x_k n}{1}} = \frac{3}{2} * e^0 - \frac{1}{2} * e^{i\pi x_k}$
  $= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-1)^{x_k}$
  (bei Darstellung von Werten $\neq 1; 2$ beachten: nur der Realteil)
- In reeller Schreibweise:
  - $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ -> $\frac{a_0}{2} = \frac{3}{2}, a_1 = -1$
  - $f(x) = \frac{3}{2} - \cos(1\pi x)$ - ist aber falsch!
  - $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos(1\pi x)$ - ist richtig!

Beispiel Fortsetzung / Symmetrie

- Wiederholung komplexe Darstellung bei Fourierreihe
  - Statt $\sum_{n=1}^{N}$ ... ist es $\sum_{n=-N}^{N}$ ..., damit sich die Imaginärteile von c_n aufheben
  - Es gilt: $\overline{c_{N-n}} = c_n$

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3) \\ f(x_0)-i\,f(x_1)-f(x_2)+i\,f(x_3) \\ f(x_0)-f(x_1)+f(x_2)-f(x_3) \\ f(x_0)+i\,f(x_1)-f(x_2)-i\,f(x_3) \end{pmatrix}$$

  - → alle Informationen sind in c_0 bis $c_{\frac{N}{2}}$ enthalten.

Symmetrie

- Da $\overline{c_{N-n}} = c_n$ gilt auch $\overline{c_{N-\frac{N}{2}}} = c_{\frac{N}{2}} \rightarrow c_{\frac{N}{2}}$ ist reell.
- → $c_{\frac{N}{2}} = \frac{1}{2} a_{\frac{N}{2}}$ (da $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$)
- $c_0 = \frac{1}{2} a_0$ (siehe $c_{\frac{N}{2}}$)

DFT in reeller Darstellung

- $$f(x_k) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n\, e^{\frac{i\pi x_k}{L} n} = c_0 + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} c_n\, e^{\frac{i\pi x_k}{L} n} + c_{\frac{N}{2}} \cos\left(\frac{\pi N}{2L} x_k\right) + \underbrace{\sum_{n=\frac{N}{2}+1}^{N-1} c_n\, e^{\frac{i\pi x_k}{L} n}}_{\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} \overline{c_n\, e^{\frac{i\pi x_k}{L} n}}}$$

- $\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} c_n\, e^{\frac{i\pi x_k}{L}n} + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} \overline{c_n\, e^{\frac{i\pi x_k}{L}n}}$

$$= \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} c_n\, e^{\frac{i\pi x_k}{L}n} + \overline{c_n\, e^{\frac{i\pi x_k}{L}n}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} a_n \cos\left(\frac{\pi x_k n}{L}\right) + \mathrm{b_n} \sin\left(\frac{\pi x_k n}{L}\right)$$

$$(a+bi) * (c+di) = ac + adi + bci - bd$$

$$\overline{(a+bi)} * \overline{(c+di)} = ac - adi - bci - bd$$

Mit $(a+bi) = c_n = \left(\frac{a_n}{2} - \frac{ib_n}{2}\right)$

und $(c+di) = e^{\frac{i\pi x_k n}{L}} = \cos\left(\frac{\pi x_k n}{L}\right) + \sin\left(\frac{\pi x_k n}{L}\right) i$

-> $(a+bi) * (c+di) + \overline{(a+bi)} * \overline{(c+di)}$

$$= 2ac - 2bd = a_n \cos\left(\frac{\pi x_k n}{L}\right) + \mathrm{b_n} \sin\left(\frac{\pi x_k n}{L}\right)$$

- $f(x_k) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \, e^{\frac{i\pi x_k}{L}n} = c_0 + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} c_n \, e^{\frac{i\pi x_k}{L}n} + c_{\frac{N}{2}} \cos\left(\frac{\pi N}{2L} x_k\right) + \sum_{n=\frac{N}{2}+1}^{N-1} c_n \, e^{\frac{i\pi x_k}{L}n}$
- $f(x_k) = \frac{a_0}{2} + \left(\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} a_n \cos\left(\frac{\pi x_k n}{L}\right) + \mathrm{b_n} \sin\left(\frac{\pi x_k n}{L}\right)\right) + \frac{a_{\frac{N}{2}}}{2} \cos\left(\frac{\pi N}{2L} x_k\right)$

Nyquist-Theorem mathematisch

- Wenn man bis Signale mit einer Frequenz bis f_{max} analysieren möchte, braucht man eine Abtastfrequenz von $> 2 * f_{max}$
- $f(x_k) = \frac{a_0}{2} + \left(\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} a_n \cos\left(\frac{\pi x_k n}{L}\right) + \mathrm{b_n} \sin\left(\frac{\pi x_k n}{L}\right)\right) + \frac{a_{\frac{N}{2}}}{2} \cos\left(\frac{\pi N}{2L} x_k\right)$ -> d.h. höchste Frequenz ist $\frac{\pi N}{2L}/2\pi = \frac{\mathrm{N}}{4\mathrm{L}} = \frac{\mathrm{N}}{2\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{N}}{2}\mathrm{f_1}$ -> $2N$ Messwerte, um $f_{\mathrm{max}} = N f_1$ messen zu können

Medizinische Informatik
Universität Heidelberg
Hochschule Heilbronn

Hochschule Heilbronn

Technik Wirtschaft Informatik

Fast-Fourier-Transformation

Analysis 2 - Tutorium

Simon Schweizer
simon-tobias.schweizer@hs-heilbronn.de

Diskrete Fourier-Transformation

- Aufwändig, da N^2 Summen und $2(N-1)^2 + N$ Multiplikationen notwendig sind
- → bei vielen Messwerten sehr rechen- und zeitintensiv

DFT ist eine lineare Funktion

- -> siehe LA: Funktion ist durch die Transformationsmatrix F darstellbar
  $\overrightarrow{c_n} = F * \vec{y}$

Faltung zweier Folgen

- Der Signalfolgen: (y_ks) (Messwerte)
  - $w_k * y_k = \sum_{m=0}^{N-1} w_m * y_{k-m}$
- Der Spektralfolgen: (c_ns)
  - $a_n * b_n = \sum_{m=0}^{N-1} a_m * b_{n-m}$

NICHT die Fourier-Koeffizienten in Fourierdarstellung! ${c_0}_n = a_n, {c_1}_n = b_n$

Faltungssatz

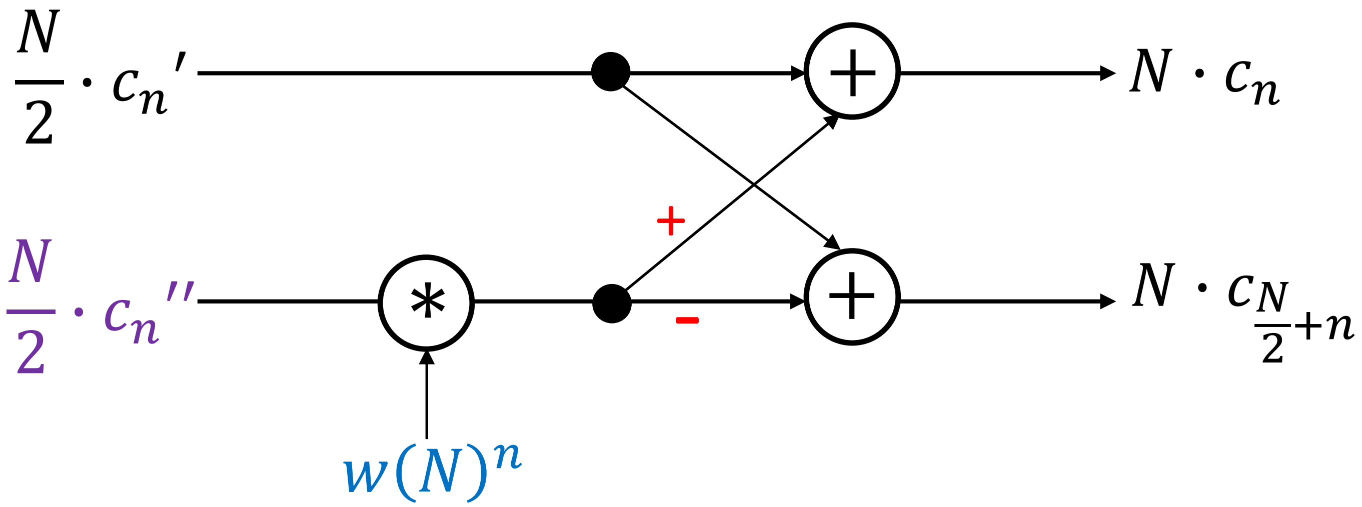
- w_k und y_k seine 2 Signalfolgen (Messwerte) mit den Spektralfolgen $a_n = DFT\{w_k\}$
  und $b_n = DFT\{y_k\}$
  - $c_n = DFT\{w_k * y_k\} = a_n * b_n = \sum_{m=0}^{N-1} a_m * b_{n-m}$
  - $z_k = IDFT(a_n * b_n) = \frac{1}{N}(w_k * y_k) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} w_m * y_{k-m}$

FFT

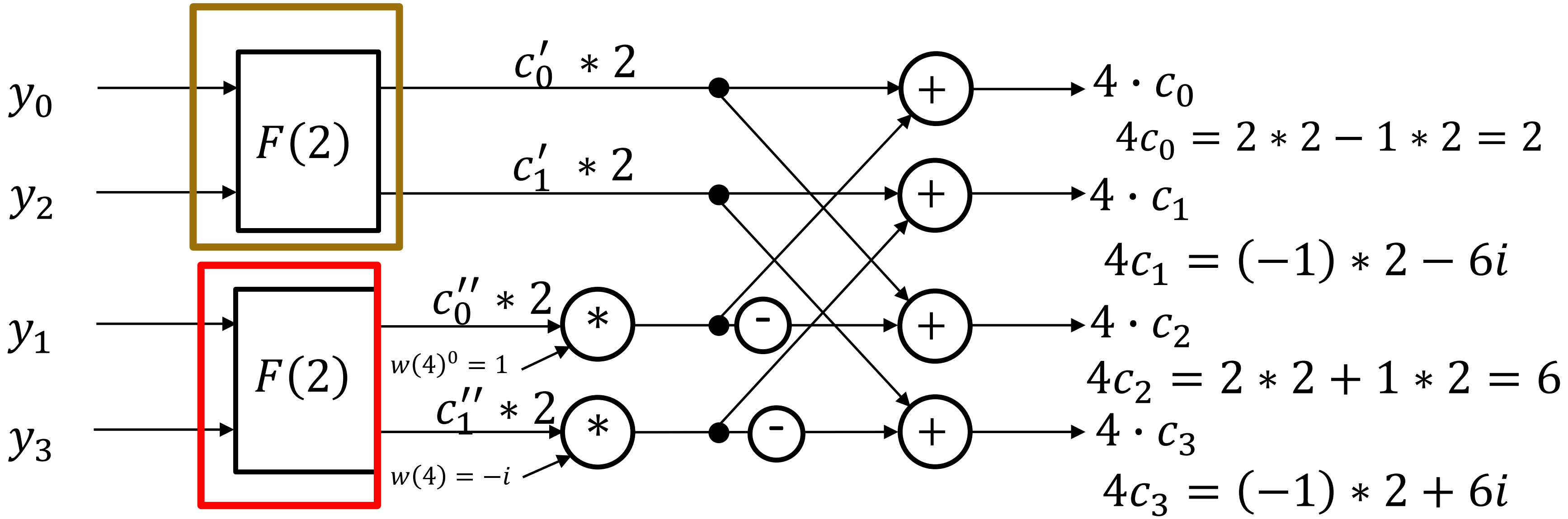
- Prinzip: DFT der Länge N auf 2 DFT der Länge $\frac{N}{2}$ zurückführen
  - DFT von $\frac{N}{2}$ auf $\frac{N}{4}$ usw. bis trivial
  - Aufteilung auf gerade und ungerade Indizes k:
    $(w(N) = e^{-\frac{i2\pi}{N}})$
  - Gerade: $c'_n = \frac{1}{\frac{1}{2}N} \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} y_{2m} * w\left(\frac{N}{2}\right)^{mn}$
  - Ungerade: $c''_n = \frac{1}{\frac{1}{2}N} \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} y_{2m+1} * w\left(\frac{N}{2}\right)^{mn}$

- Gerade: $c'_n = \frac{1}{\frac{1}{2}N} \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} y_{2m} * w\left(\frac{N}{2}\right)^{mn}$
- Ungerade: $c''_n = \frac{1}{\frac{1}{2}N} \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} y_{2m+1} * w\left(\frac{N}{2}\right)^{mn}$
- $Nc_n = \frac{N}{2} c'_n + w(N)^n \frac{N}{2} c''_n \left(0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1\right)$
- $Nc_{\frac{N}{2}+n} = \frac{N}{2} c'_n - w(N)^n \frac{N}{2} c''_n \left(0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1\right)$

- $N c_n = \frac{N}{2} c'_n + w(N)^n \frac{N}{2} c''_n \; \left(0 \le n \le \frac{N}{2} - 1\right)$
- $N c_{\frac{N}{2}+n} = \frac{N}{2} c'_n - w(N)^n \frac{N}{2} c''_n \; \left(0 \le n \le \frac{N}{2} - 1\right)$



Beispiel mit $N = 4$



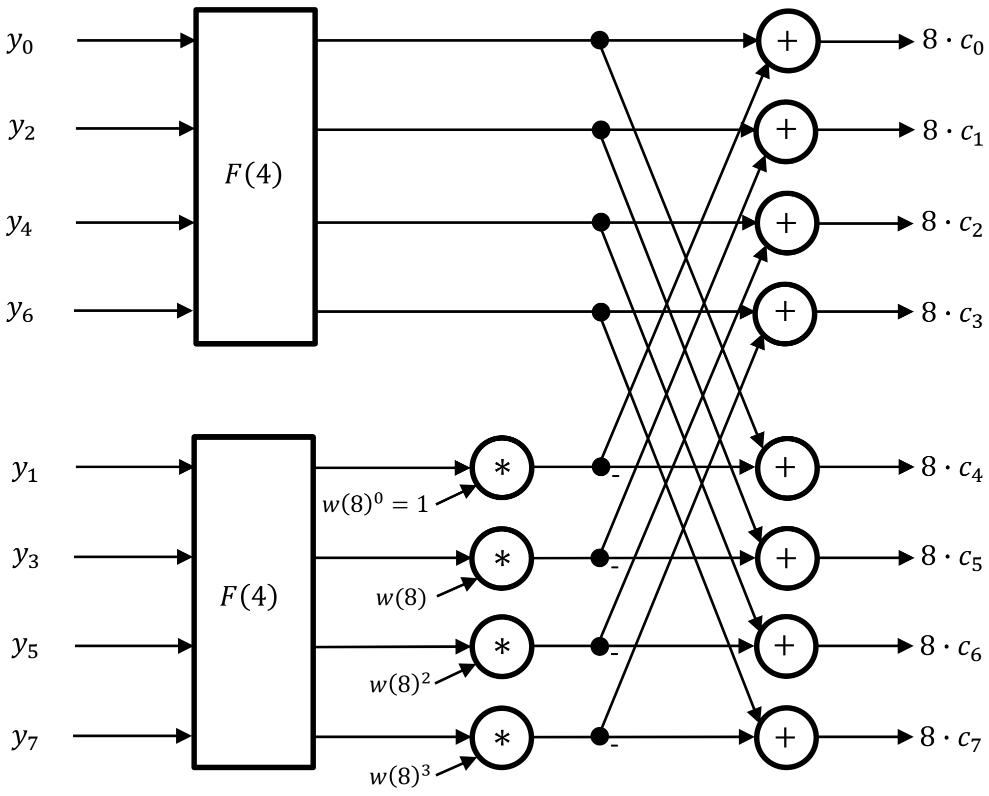
y_0	y_1	y_2	y_3
1	2	3	-4

$$\begin{pmatrix} c'_0 \\ c'_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c''_0 \\ c''_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Mit $N = 8$

- Aufteilen auf $2 * DFT$ mit $N = 4$, diese dann wieder mit FFT lösen (oder natürlich direkt)



Fouriertransformation

- Beliebige (nicht periodische) Funktion als Fourierreihe darstellen
- Grenzwertprozess: $T \to \infty$

3,2,5,1

- $2 * \begin{pmatrix} {c_0}' \\ {c_1}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $2 * \begin{pmatrix} c_0'' \\ c_1'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $4c_0 = 8 + w(4)^0 * 3 = 11$
- $4c_1 = -2 + w(4)^1 * 1 = -2 - i$
- $4c_2 = 8 - w(4)^0 * 3 = 5$
- $4c_3 = -2 - w(4)^1 * 1 = -2 + i$

MEDIZINISCHE INFORMATIK

UNIVERSITÄT HEIDELBERG

HOCHSCHULE HEILBRONN

HOCHSCHULE HEILBRONN

TECHNIK WIRTSCHAFT INFORMATIK

Differentialrechnung

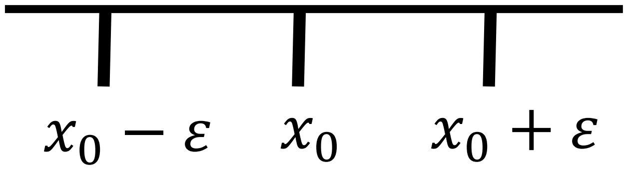
Analysis 2 - Tutorium

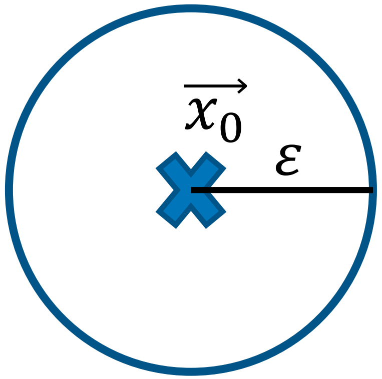
Simon Schweizer
simon-tobias.schweizer@hs-heilbronn.de

Campus Heilbronn

Grundbegriffe

- Abstand: $d(\vec{x},\vec{y}) = |\vec{x}-\vec{y}| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ \dots + (x_n-y_n)^2}$
- ε –Umgebung:
  - Menge an Punkten $\vec{x}$ um $\overrightarrow{x_0}$ mit $|\vec{x}-\overrightarrow{x_0}| < \varepsilon$





Intervalle

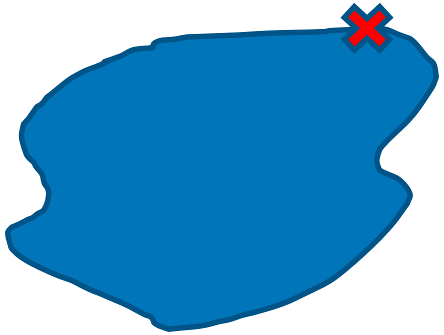
- Abgeschlossenes Intervall (mit Grenzpunkten)
  - $I = [a, b]$
- Offenes Intervall (ohne Grenzen)
  - $I = (a, b) =]a, b[$
- Halboffenes Intervall
  - $I = [a, b) = [a, b[$ (oben offen)
  - $I = (a, b] =]a, b]$ (unten offen)
- $\rightarrow \mathrm{I} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, a_i \frac{\leq}{<} x_i \frac{\leq}{<} b_i, i = 1, \dots, n \right\}$

Teilmengen

- Offene Teilmenge
  - $\forall \vec{x} \in U : \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset U$: Wenn es für jeden Punkt eine Umgebung gibt, in der auch alle Punkte in der Teilmenge enthalten sind
  - -> eine Menge ohne Randpunkte
- Abgeschlossene Teilmenge
  - Wenn $\mathbb{R}^n \backslash \mathrm{U}$ eine offene Teilmenge ist

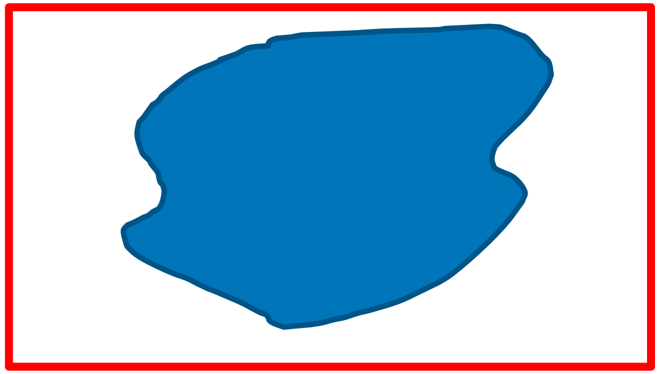
Rand / Randpunkte

- Randpunkt: In jeder (ε –)Umgebung gibt es einen Punkt aus U und einen Punkt aus $\mathbb{R}^n \backslash \mathrm{U}$ (Punkt, der nicht aus U ist)
- Alle Punkte zusammen: Rand



Teilmengen

- Teilmenge beschränkt, wenn ein abgeschlossenes Intervall I existiert mit $x \subset I$
- Kompakt: beschränkt und abgeschlossen (mit Randpunkten)



Folgen im $\mathbb{R}^n$

- Jedem $k \in \mathbb{N}$ ist ein $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$ zugeordnet.

  Kurz $\left(\vec{x}^{(k)}\right)$
- Konvergenz: Die Folge konvergiert, wenn alle Koordinatengleichungen konvergieren
  - -> $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$ konvergiert gegen $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, wenn x_1 gegen a_1, x_2 gegen a_2, …, x_n gegen a_3 konvergiert
- Eine Folge kann maximal einen Grenzwert haben

KOORDINATENSYSTEME

Koordinatensysteme

Polarkoordinaten (im $\mathbb{R}^2$)

Darstellung von kartesischen Koordinaten durch r (≥ 0) und den Winkel $\varphi \in [0,2\pi)$

$$r = \left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = r\sin(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \arcsin(\frac{x}{r})$$

$$y = r\cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \arccos(\frac{y}{r})$$

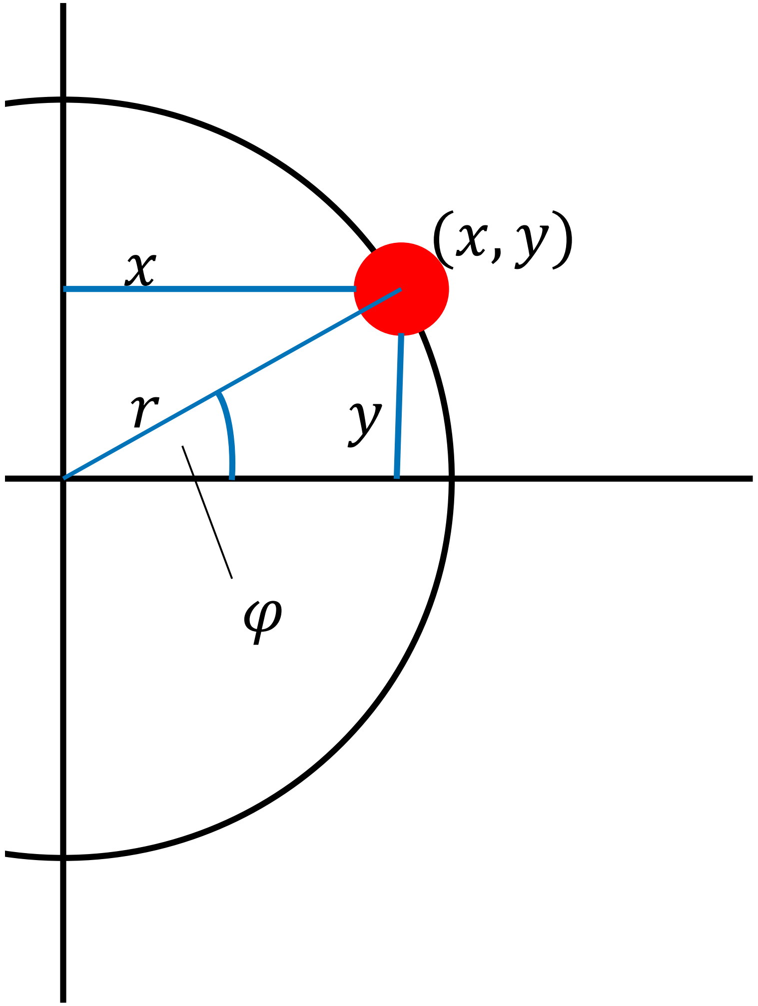
oder allgemein:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), y > 0, x > 0$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, \mathrm{x} < 0$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi, y < 0, x < 0$$

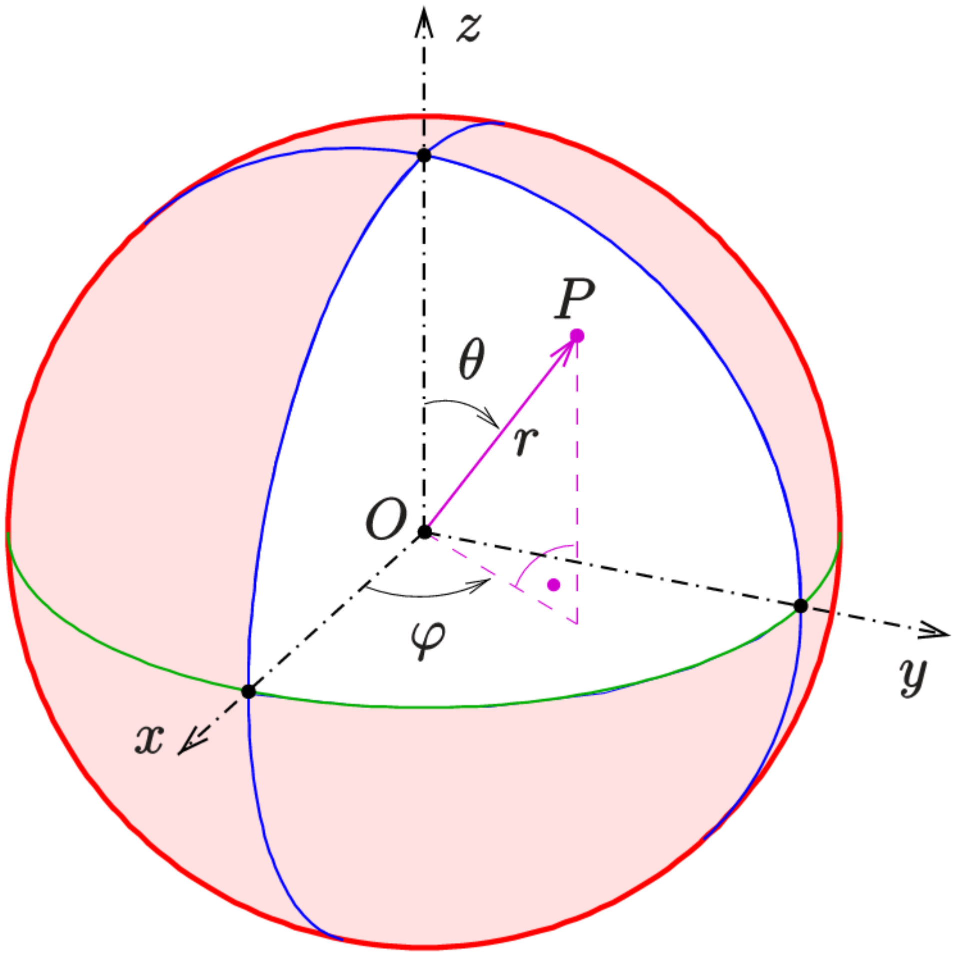
(entspricht Umrechnung bei komplexen Zahlen)



Koordinatensysteme

- Zylinderkoordinaten (im $\mathbb{R}^3$) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
  - Wie Polarkoordinaten $x, y \ \rightarrow r, \varphi$
  - Dritte Koordinate bleibt erhalten $z \ \rightarrow z$

Koordinatensysteme



- Kugelkoordinaten (im $\mathbb{R}^3$) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
  - $r = \left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right|$
  - $\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$
  - $\cos(\theta) = \frac{z}{r}$
  - $x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$
  - $y = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$
  - $z = r \cos(\theta)$

Funktionen vom $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$

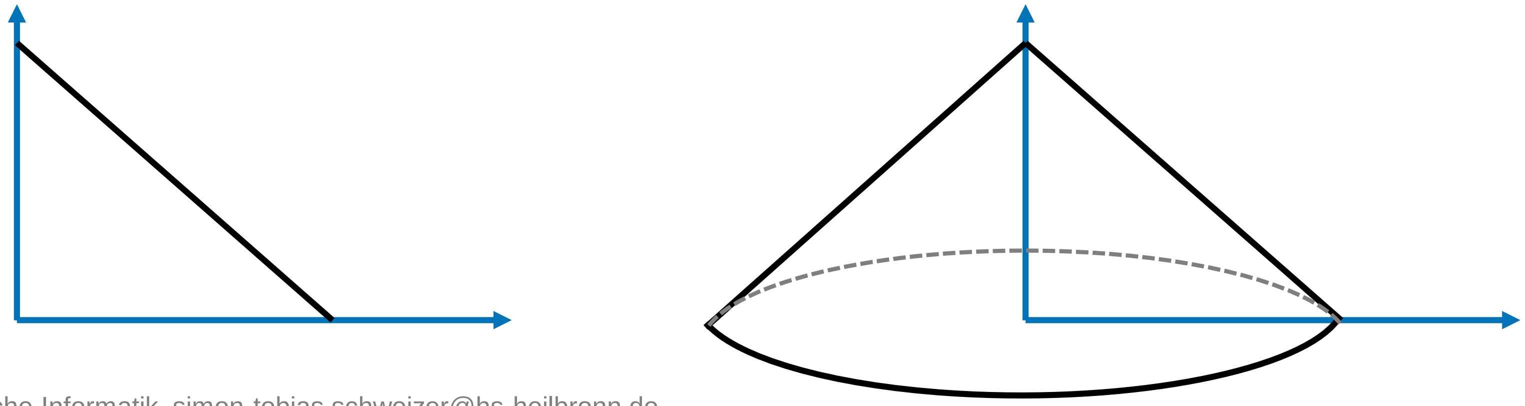
- Definitonsmenge $D \subset \mathbb{R}^2$
- Wertemenge $W = W(f) = \{f(\vec{x}) | x \in D\} \subset \mathbb{R}$
- Punkten aus D wird ein Funktionswert (eine Zahl) zugewiesen
  - z.B. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: x und y wird die Höhe z zugewiesen

Ebenen im $\mathbb{R}^3$

- Allgemein: $ax + by + cz + d = 0$
- Oder auch: $ax + by + c = z$ (a,b,c nicht identisch)
- In die Gleichungen können die Spurpunkte (auf den Achsen) sehr leicht eingesetzt werden
  -> a,b,c(,d) berechnen

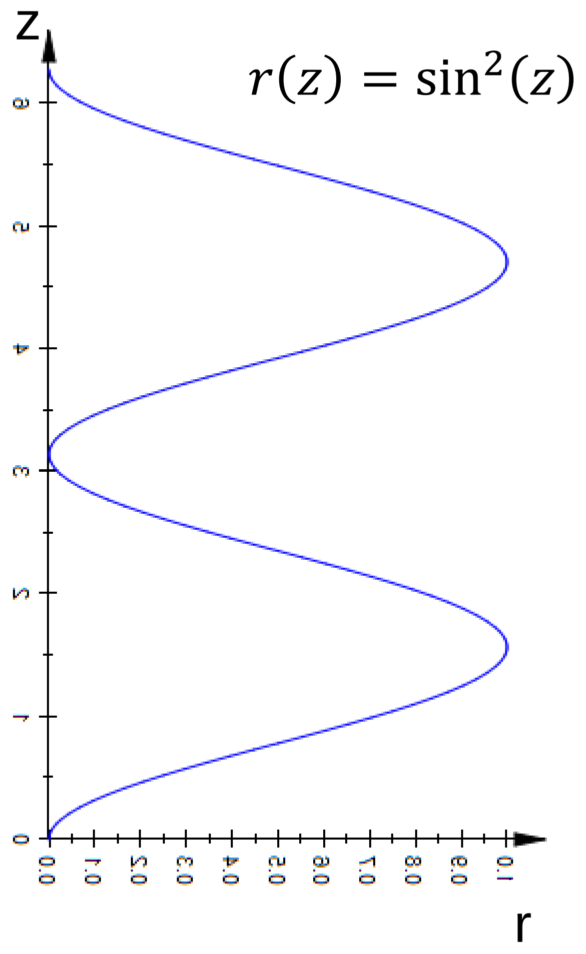
Rotationsflächen

- Rotationssymetrisch (zur z-Achse): Funktionswert/ Flächengleichung ist unabhängig vom Winkel φ
  - Häufig Darstellung in Zylinderkoordinaten (da von φ unabhängig)
  - Allgemein: rotationssymetrisch zur z-Achse: x, y kommen in der Gleichung immer nur als $x^2 + y^2$ vor:
    - z.B. $\sin\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$, da $x^2 + y^2 = r^2$



Übung Rotationsfläche

- Rotationskörper mit:
- $0 \leq z \leq 2\pi$



Schnittkurvendiagramme

- Schnitte parallel zu Ebenen: in eine Variable wird eine Konstante eingesetzt
  - Z.B. parallel zur $x - y$-Ebene: für z wird eine Konstante, z.B. 5 eingesetzt und nach den anderen Variablen umgeformt

Grenzwert

- Eine Funktion $\mathrm{f}: U\backslash\{\overrightarrow{x_0}\} \rightarrow \mathbb{R}$ hat den Grenzwert c, wenn für jede Folge, die gegen $\overrightarrow{x_0}$ konvergiert, gilt:

$$\lim_{k\to\infty} f\left(\vec{x}^{(k)}\right) = c$$

  - Das muss für jede Folge erfüllt sein!

Übung Grenzwert

- Hat $f(\vec{x}) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sin(x^2-y^2)}$ für $\vec{x} \to \vec{0}$ einen Grenzwert?
- Nein, da z.B. für $y = 0$, $x \to 0$ gilt: $\frac{\sin(x^2+y^2)}{\sin(x^2-y^2)} = \frac{\sin(x^2)}{\sin(x^2)} = 1 \to 1$
- Aber für $x = 0$, $y \to 0$: $\frac{\sin(x^2+y^2)}{\sin(x^2-y^2)} = \frac{\sin(y^2)}{\sin(-y^2)} = \frac{\sin(y^2)}{-\sin(y^2)} = -1 \to -1$
- Und $-1 \neq 1$

Ableitungen

- Partielle Ableitung: Ableitung der Funktion f nach x_i
  - $\frac{\partial f}{\partial x}(x^2 + xy^3) = 2x + y^3, \frac{\partial f}{\partial y}(x^2 + xy^3) = 3xy^2$
  - Schreibweise: $\frac{\partial f}{\partial x}$ (f nach x abgeleitet) $= f_x$
- Stetig differenzierbar: Differenzierbar und die partiellen Ableitungen sind stetig
- Satz von Schwarz: Reihenfolge der Differentiation ist egal, d.h. $\frac{\partial}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y \partial x} f(x,y)$

Gradient

- Vektor der Ableitungen nach den verschiedenen Variablen (x_is) $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
  - $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = x^2 + y^2 + z^2$
  - $grad\ f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

Tangentialebene

- Im $\mathbb{R}^2$ gibt es Tangenten (geraden), die an beliebiger Stelle x_0 anliegen und die gleiche Steigung wie $f(x_0)$ besitzen:
  - $y_T = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
- Gleiches gilt auch für $\mathbb{R}^3$:
  - $z = \left(grad\ f(\overrightarrow{x_0})\right)(\vec{x} - \overrightarrow{x_0}) + f(\overrightarrow{x_0})$
    $= f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$
- Wie auch in $\mathbb{R}^2$ muss die errechnete Tangentialebene keine Tangentialebene an dieser Stelle sein: gilt nur, wenn f an $\overrightarrow{x_0}$ stetig

Übung Tangentialebene

- Tangentialebene von $z = f(x, y) = 2x^2y - 4y$ im Punkt $P\big(1{,}2, f(1{,}2)\big)$
- $z_T = (grad\ f(\overrightarrow{x_0}))(\vec{x} - \overrightarrow{x_0}) + f(\overrightarrow{x_0})$
- $grad\ f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4xy \\ 2x^2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $z_T = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) - 4 = 8x - 8 - 2y + 4 - 4$

Fehlerrechnung/-fortpflanzung

- Totales Differential
  - Wie ändern sich Funktions-/Tangentenwerte bei Änderung von Δx und Δy?
  - Funktionsänderung: $\Delta z = f\left(\begin{pmatrix} x + \Delta x \\ y + \Delta y \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$
  - Tangentialebenenänderung:

$$dz = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

Fehlerrechnung

- Richtiger Wert: x
- Näherungswert: $\bar{x}$
- -> absoluter Fehler: $\Delta x = |x - \bar{x}|$
- Fehler meist kleiner als bekannter Wert: $\Delta x < \delta$
  - für kleine Schranken (δ) gilt: $\Delta y \leq |f'(\bar{x})| * \delta$
- Allgemein: $\Delta y \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) \right| * \Delta x_i \ (\Delta x_i \ \approx \delta_i)$

EXTREMWERTE

Extremwerte

- Relative Minima/Maxima: ε-Umgebung um $\overrightarrow{x_0}$, in der für alle $\vec{x}$ gilt: $f(\overrightarrow{x_0}) \geq$ bzw. $\leq f(\vec{x})$
- Absolute Minima/Maxima: für alle $\vec{x} \in U$ gilt: $f(\overrightarrow{x_0}) \geq$ bzw. $\leq f(\vec{x})$

Wann Minima/ Maxima?

- Notwendig: $grad\ f(\overrightarrow{x_0}) = \vec{0}$
(entspricht $f'(x_0) = 0$)
  - Alle Punkte $\vec{x_i} \in U$ mit $grad\ \vec{x_i} = \vec{0}$: Stationäre Punkte
- Unterscheiden zwischen Minimum, Maximum und Sattelpunkt ($grad = \vec{0}$, aber kein Min./Max.)

Hessesche Matrix

- Bedingung für Hessesche Matrix: $\mathrm{U} \subset \mathbb{R}^n, f\colon U \to \mathbb{R}$
  2 mal stetig differenzierbar („Ableitung" stetig)

- $$H_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

- Laut Satz von Schwarz: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

Übung Extremwerte

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: f(x,y) = e^{xy}$
- $grad\ f(x,y)$
- Hessesche Matrix $H_f(x,y)$

$$H_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n{}^2} \end{pmatrix}$$

Übung Extremwerte

- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: f(x,y) = e^{xy}$
- $grad\ f(x,y)$
- Hessesche Matrix $H_f(x,y)$
- $\begin{pmatrix} y^2 e^{xy} & e^{xy} + xye^{xy} \\ e^{xy} + xye^{xy} & x^2 e^{xy} \end{pmatrix}$

$$H_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Positiv/negativ definite Matrizen

- Positiv/negativ definit: für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq \vec{0}$ gilt: $\vec{x}^T * A * \vec{x} > 0$ bzw. < 0
- Indefinit: mindestens 1 $\vec{x}$ mit $\vec{x}^T * A * \vec{x} > 0$ und 1 $\vec{x}$ mit $\vec{x}^T * A * \vec{x} < 0$

Definit über Determinanten

- Praktisch: Berechnung über Determinanten: (nur für symmetrische Matrizen -> bei uns immer der Fall)
- $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Definiere $A_1 = (a), A_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$, ...
- Positiv definit, wenn $\det(A_1) > 0 \ldots \det(A_n) > 0$
- Negativ definit, wenn $\det(A_1) < 0, \det(A_2) > 0$, ...
- Diese Determinanten heißen Hauptminoren (LA)

Übung definite Matrizen

- Ist $\begin{pmatrix} 10 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ definit?
- Berechnen der Hauptminoren
- $\det(A_1) = 10$
- $\det(A_2) = 10 - 4 = 6$
- $\det(A_3) = 5 * \det(A_2) = 30$
- -> positiv definit

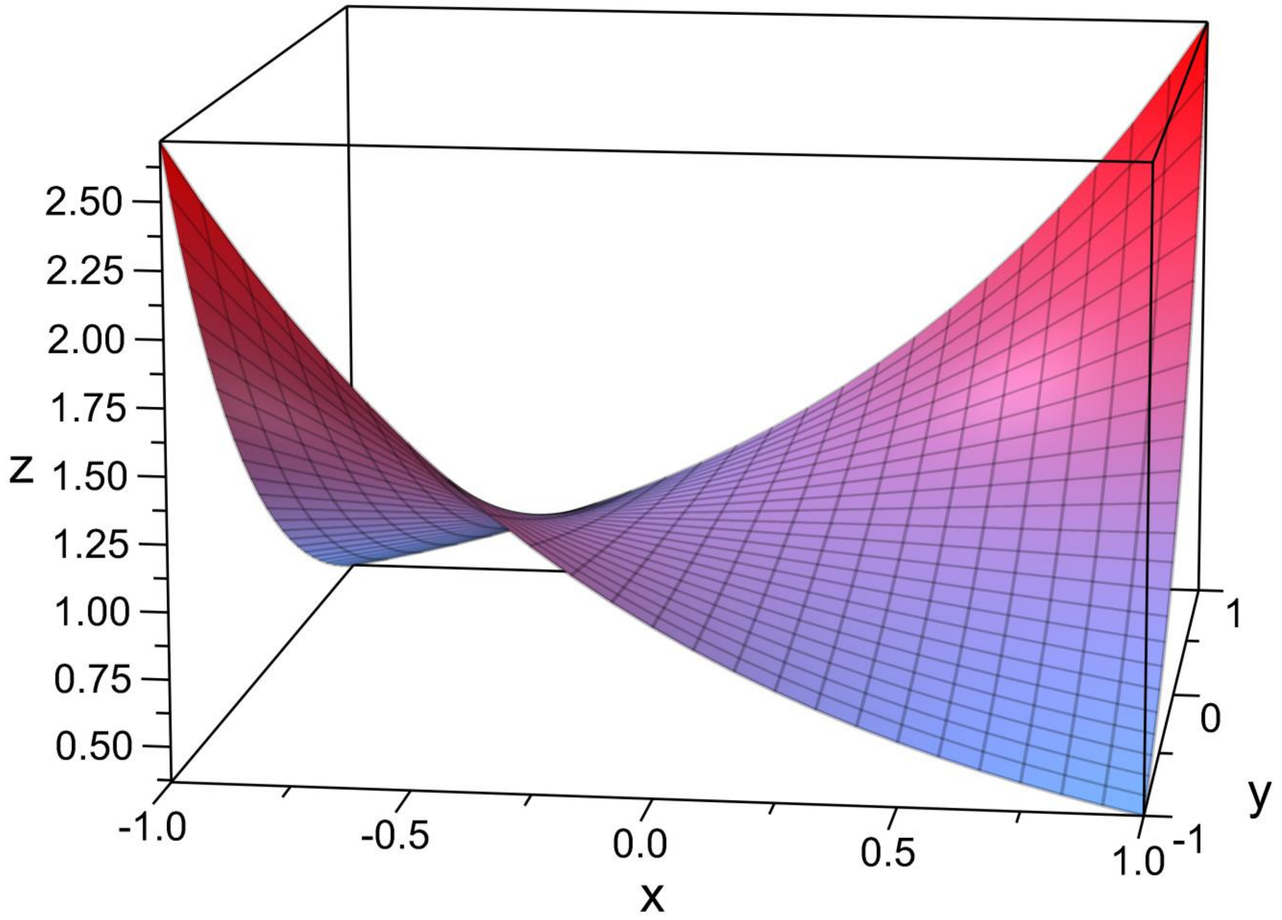
Definite Matrizen -> Extremwert?

- Wenn $grad\ f(\overrightarrow{x_0}) = 0$, also $\overrightarrow{x_0}$ stationärer Punkt:
- Ist $H_f(\overrightarrow{x_0})$ positiv definit: relatives Minimum
- Ist $H_f(\overrightarrow{x_0})$ negativ definit: relatives Maximum
- Ist $H_f(\overrightarrow{x_0})$ indefinit: Sattelpunkt
- Ansonsten: keine Aussage möglich

Übung Extrempunkte

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: f(x, y) = e^{xy}$ (wie Übung $grad$ und Hessesche Matrix)
- Wo sind Extrempunkte, und sind diese jeweils Maxima oder Minima?
- Als Extrempunkt kommt nur $\binom{0}{0}$ infrage.

e^{xy}



Gebiet + konstante Funktion

- Menge, die offen und zusammenhängend ist (es also von jedem $\overrightarrow{x_1} \in G$ zu jedem $\overrightarrow{x_2} \in G$ Punkte gibt, sodass die Strecken in G liegen.
- Konstante Funktion:

$$\forall \vec{x} \in \mathrm{G}: f(\vec{x}) = a \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in \mathrm{G}: grad\ f(\vec{x}) = \vec{0}$$

Ausgleichspolynome

- Messwerte -> Polynom mit möglichst geringer Abweichung
- Abweichung: $\mathrm{F} = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$ (mit Methode der kleinsten Quadrate)
- 1. Erstellen des allg. Polynoms n-ten Grades
- 2. Einsetzen in F, Bestimmung des Minimums

Ausgleichspolynome (LA)

- Messdaten: $\begin{pmatrix} t_i \\ b_i \end{pmatrix}$ (t_i: t-Koordinate, b_i: y-Koordinate)
- m: Polynomgrad
- Mit $A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^m \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^m \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ gilt:
- $y = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k$ mit $\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$

Übung Ausgleichspolynom

t	b
0	1
1	2
2	3
5	4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^m \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^m \end{pmatrix}$$

$$y = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k \text{ mit } \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$$

Funktionen vom $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$

- Beispielsweise: $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

  oder $\vec{f}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} xy \\ x+y \end{pmatrix}$
- Grenzwert: Wenn Einzelfunktionen Grenzwert besitzen

Jacobische Funktionalmatrix/ Differential

- Zeilenweise die Gradienten der einzelnen Funktionen

- $(Df)(\overrightarrow{x_0}) = J_f(\overrightarrow{x_0}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

Übung Differential

$$(Df)(\overrightarrow{x_0}) = J_f(\overrightarrow{x_0}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

- $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2y^2 \\ x+y \end{pmatrix}$ an $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $D_f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2xy^2 & 2yx^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $D_f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2*1*4 & 2*2*1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Kettenregel

- $h = f \circ g \Leftrightarrow f\big(g(\vec{x})\big)$ mit$g\colon \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n, f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
- Für die Jacobische Funktionalmatrix von h gilt:
- $D_h(\vec{x}) = D_f(\vec{x}) * D_g(\vec{x})$
- „äußere Ableitung mal innere Ableitung“

Übung Kettenregel

- $f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $g(a,b,c,d) = a + b + c + d$
- $D_{g(f(x,y))} = (1\ 1\ 1\ 1) * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1 + 2x \quad 1 + 2y)$
- $g\big(f(x,y)\big) = x + y + x^2 + y^2 + 1$

Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$

- Wiederholung: Integrale im $\mathbb{R}^2$
  - Integral entspricht Flächeninhalt (im Regelfall)
  - Komplexere Funktionen wurden durch Rechtecke angenähert
- $\mathbb{R}^3$
  - Integral entspricht Volumen
  - Komplexere Funktionen werden durch Quader/Objekte im $\mathbb{R}^3$ angenähert

Idee

- Annäherung des Integrals durch kleine Körper des $\mathbb{R}^n$ (im $\mathbb{R}^2$: Rechtecke, Kreisbögen; im $\mathbb{R}^3$: Quader, Kugelteile, …)
- Im $\mathbb{R}^3$: $\int_I f(x,y)d(x,y)$
- Integrierbar, wenn auf I stetig oder stückweise stetig und beschränkt
- Bei nur in Teilbereichen definierten Funktionen wird $f(\vec{x}) = 0$ gesetzt

Bekannte Eigenschaften

- $\int (f+g)d(x,y) = \int fd(x,y) + \int gd(x,y)$
- $\int c * f(x,y)\, d(x,y) = c\int f(x,y)\, d(x,y)$
- Wenn Grenzen nicht voneinander abhängig gilt:
  - $\int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} f(x,y)dydx = \int_{y=c}^{d} \int_{x=a}^{b} f(x,y)dxdy$
- Wenn Produkt zweier Funktionen, die von unterschiedlichen Variablen abhängig sind:
  - $\int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} f(x) * g(y)d(x,y) = \left(\int_{x=a}^{b} f(x)dx\right) * \left(\int_{y=c}^{d} g(y)dy\right)$
- Integrale über Intervalle lassen sich aufteilen auf Intervalle von Teilintervallen

Wiederholung Integration

- Verfahren
  - Integration durch Substitution
  - Integration durch partielle Integration
  - Integration durch Partialbruchzerlegung
  - Siehe https://tutorium.sisch.website/presentation.php?content=integralrechnung

Übung Mehrfachintegral

- $\int_{y=0}^{2} \int_{x=0}^{1} xy \; dxdy$
- $\int_{y=0}^{2} \int_{x=0}^{1} (x + y) \; dxdy$
- $\int_{y=0}^{2} \int_{x=0}^{y} xy \; dxdy$
- $\int_{z=0}^{2} \int_{y=0}^{z} \int_{z=0}^{y} xyz \;\; dxdydz$

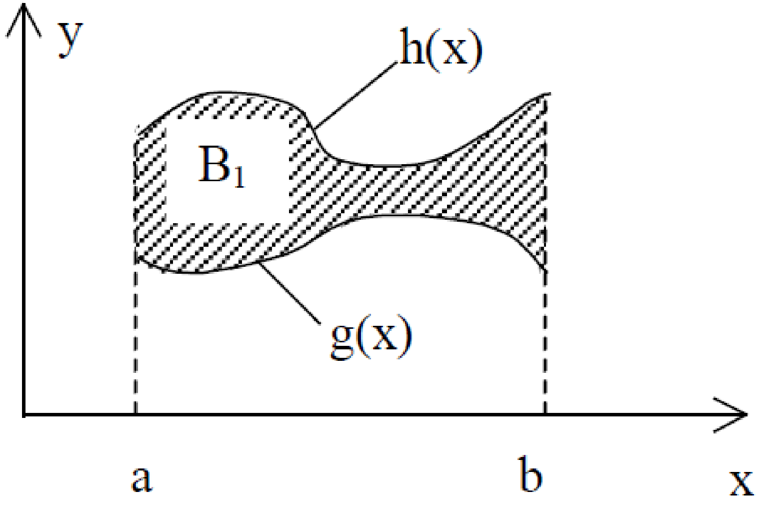
Flächenelement

- $d(x,y) = dA = dx * dy$ (infinitesimal kleines) Flächenelement
- $|B| = \iint_B 1 * d(x,y)$

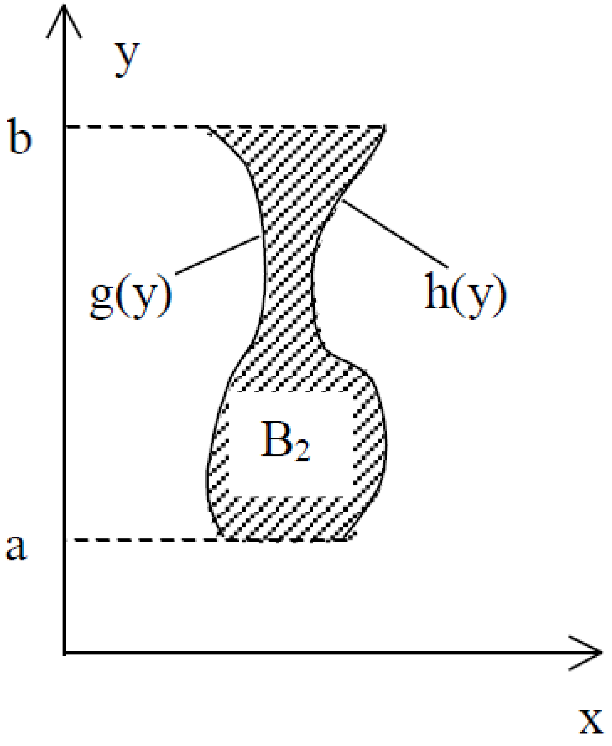
Bereich herausfinden

- Doppelintegral (2 Variablen)
- Je nach Bereich in kartesischen oder Polarkoordinaten (in Abhängigkeit von x, y oder r, φ)

In kartesischen Koordinaten



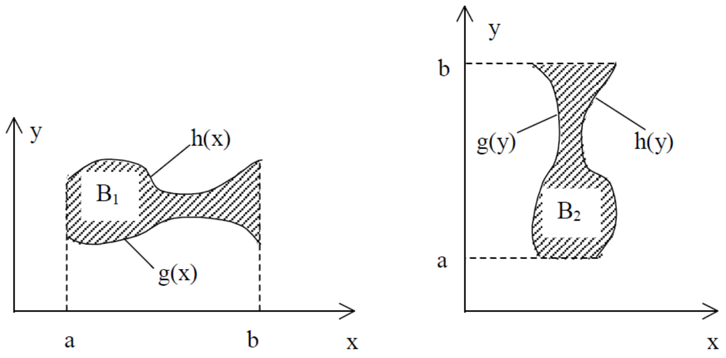
Typ 1: Grenze nach oben/unten
in Abhängigkeit von x



Typ 2: Grenze nach links/rechts
in Anhängigkeit von y

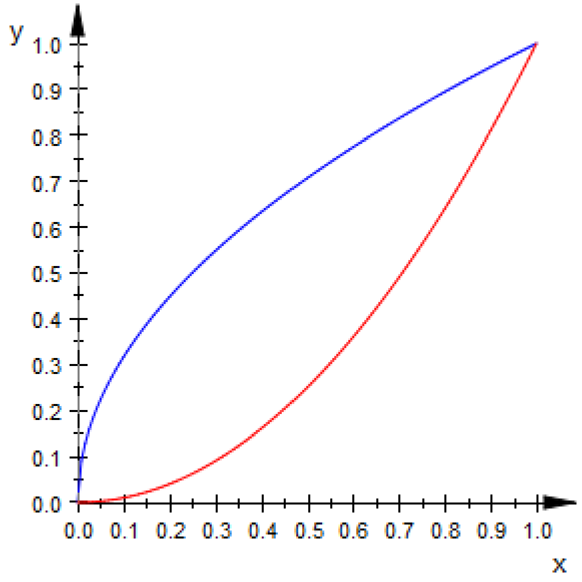
In kartesischen Koordinaten

- Wenn Typ 1:
  $\int_{x=a}^{b} \int_{y=g(x)}^{h(x)} \ldots dydx$
- Wenn Typ 2:
- $\int_{y=a}^{b} \int_{x=g(y)}^{h(y)} \ldots dxdy$



Beispiel

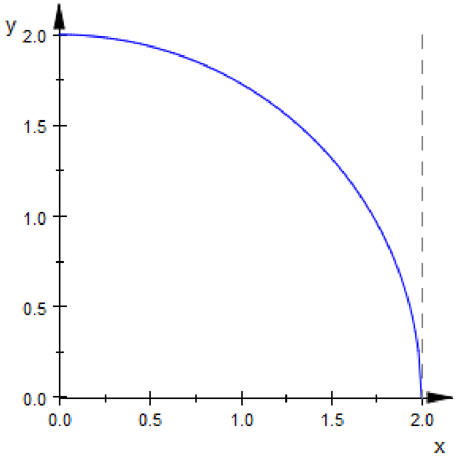
1.



Begrenzung durch: $y_1 = \sqrt{x}$ und $y_2 = x^2$
sowie $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$

Gesucht: Integral über $f(x,y) = x^2$

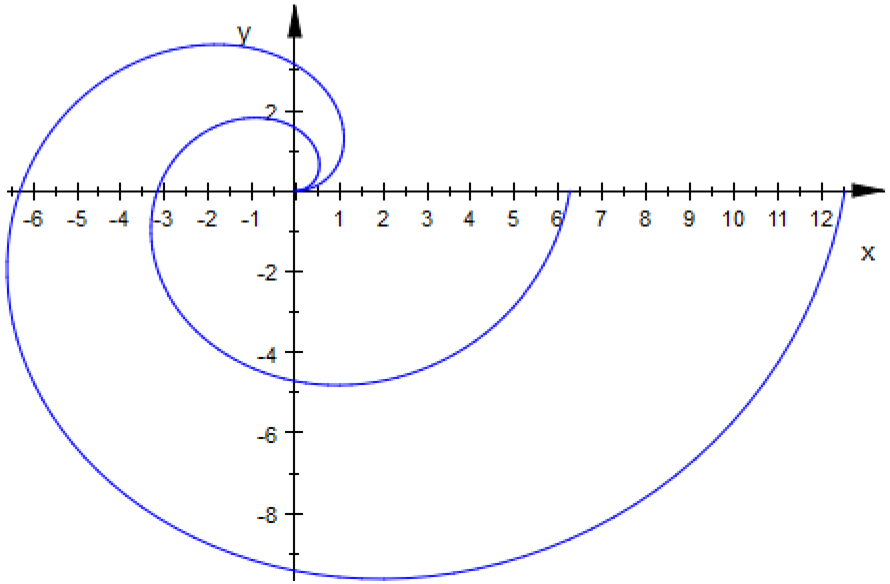
2.



Viertelkreis im ersten Quadranten mithilfe von **Kartesischen Koordinaten** und Radius $R = 2$

Gesucht: Integral über $f(x,y) = y^2$

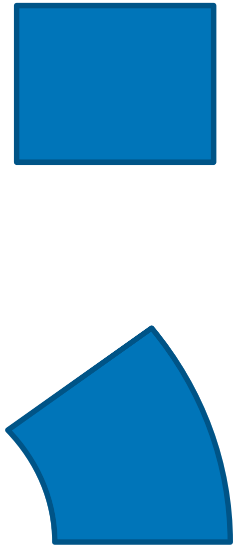
Polarkoordinaten



Normalbereich von Typ 1:
φ läuft frei von a nach b
r ist abhängig von φ

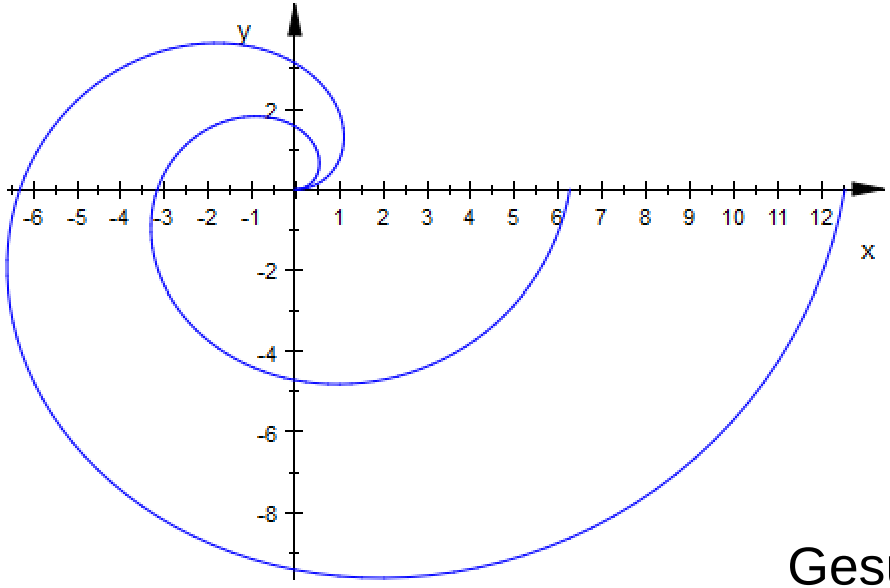
Flächenelement 2

- Bei kartesischen Koordinaten: Rechteck
- Bei Polarkoordinaten: Kreisbogen



- Wichtig: Zum Ausgleich notwendig
  - $dx\,dy \;\rightarrow \boldsymbol{r}\,dr\,d\varphi$

Integral Polarkoordinaten



Normalbereich von Typ 1:
φ läuft frei von a nach b
r ist abhängig von φ

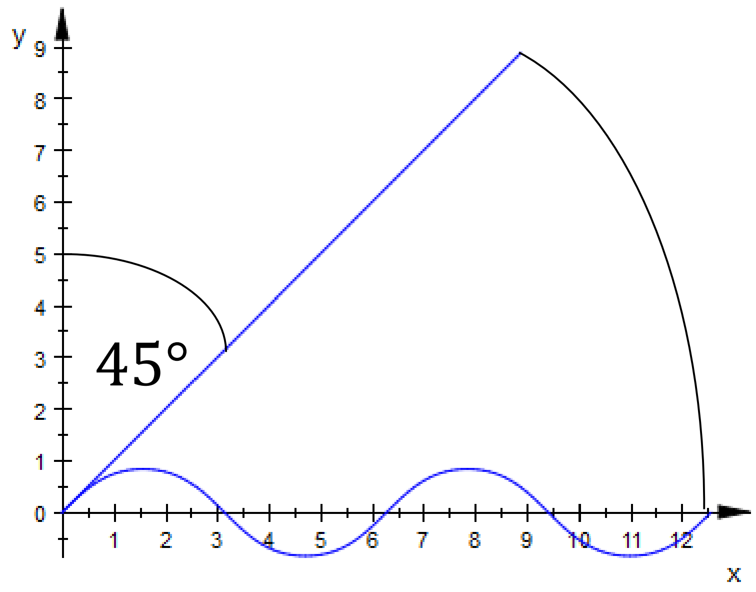
$$r_1(\varphi) = \varphi$$
$$r_2(\varphi) = 2\varphi$$
$$\varphi \in [0,2\pi]$$

Gesucht: Flächeninhalt = Integral über 1

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=\varphi}^{2\varphi} 1\, r\, dr\, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r^2\right]_{r=\varphi}^{2\varphi} d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{3}{2} \varphi^2 d\varphi = \left[\frac{1}{2}\varphi^3\right]_0^{2\pi} = 4\pi^3$$

Beispiel

- Normalbereich vom Typ 2: r läuft frei zwischen a und b; φ ist abhängig von r



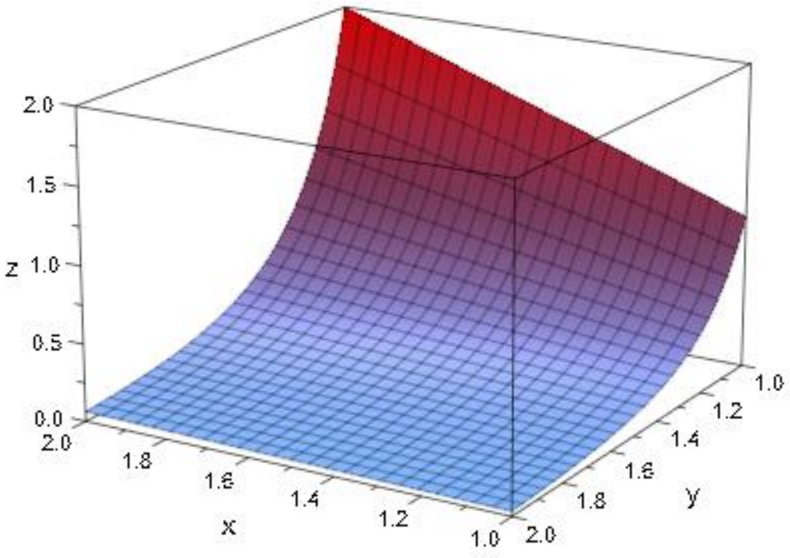
Gesucht: Flächeninhalt

Dreifachintegrale

- Integrale über ein Volumen
- dV: Volumenelement, in Kartesischen Koordinaten: $dxdydz$
- Beispielsweise

$$\iiint_U f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_{x=a}^{b} \int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z=z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,dy\,dx$$

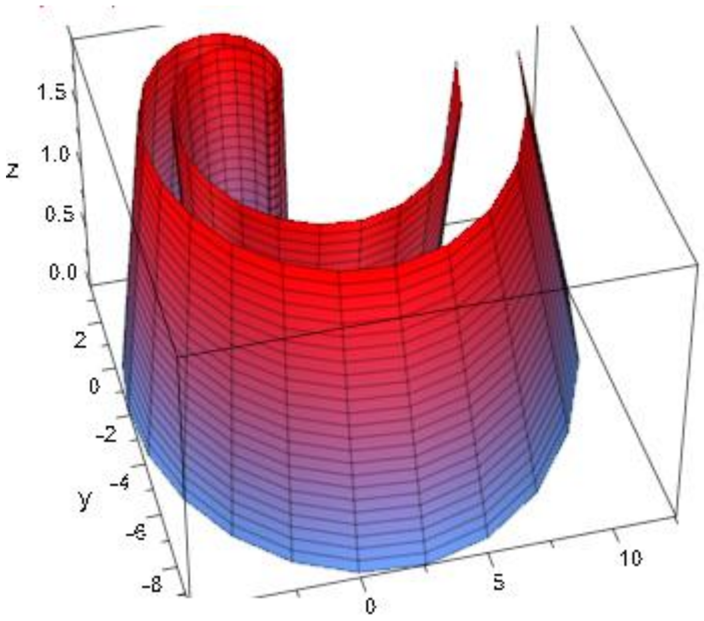
Beispiel Dreifachintegral

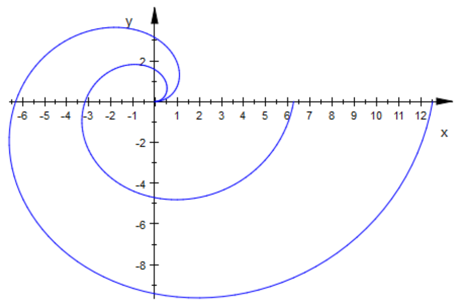


Integral über x^2 des Volumens, begrenzt durch:
$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ y_1 = 1,\ y_2 = 2,\ z_1 = 0$
und der Funktion $z_2 = f(x, y) = \frac{x}{y^5}$

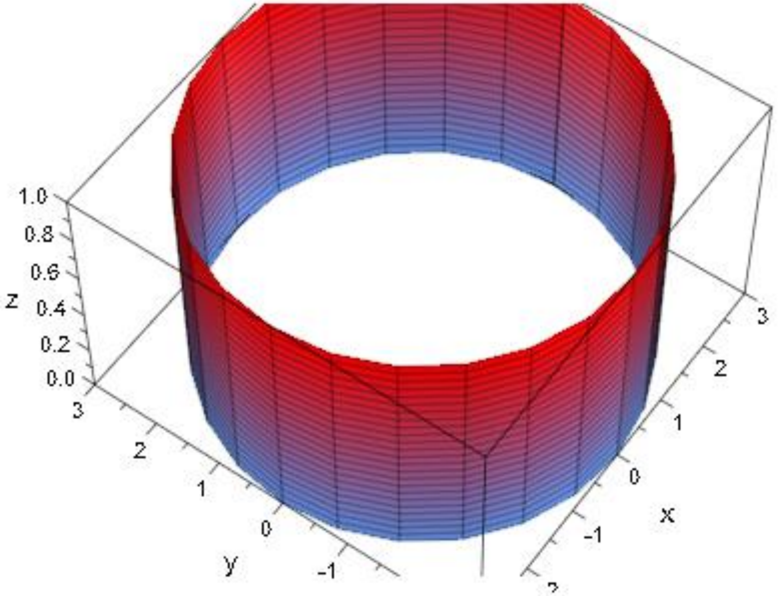
Zylinderkoordinaten

- Wie Polarkoordinaten, aber mit z-Komponente
- Variablen: $\varphi, r, z \;\rightarrow dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$





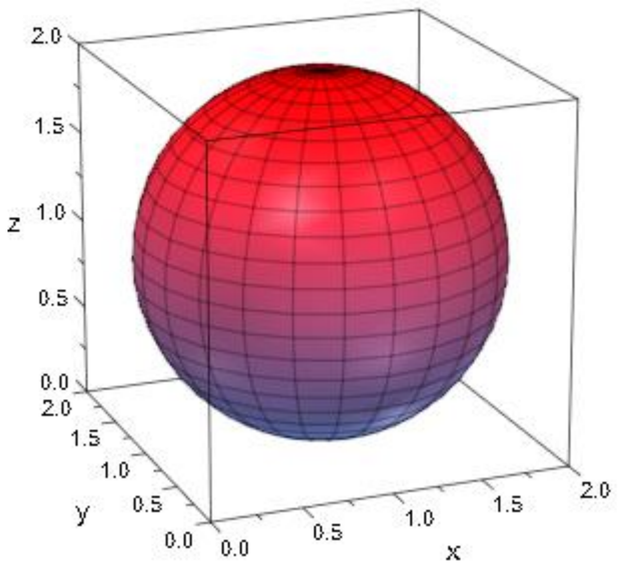
Beispiel Dreifachintegral Zylinderkoordinaten



Berechnung des Integrals über $x^2 + y^2$ des dargestellten Bereichs.

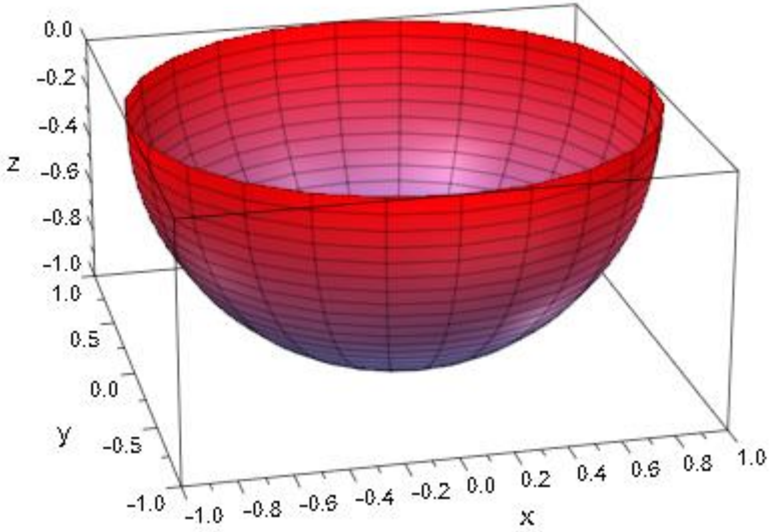
Kugelkoordinaten

- Angabe von φ, θ, r
- Volumenelement $dV = r^2 \sin(\theta)\, dr\, d\varphi\, d\theta$



$$\iiint_B f\, r^2 \sin(\theta)\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

Beispiel Kugelkoordinaten



Integral über $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ der unteren Einheitskugelhälfte

Kurven im $\mathbb{R}^n$

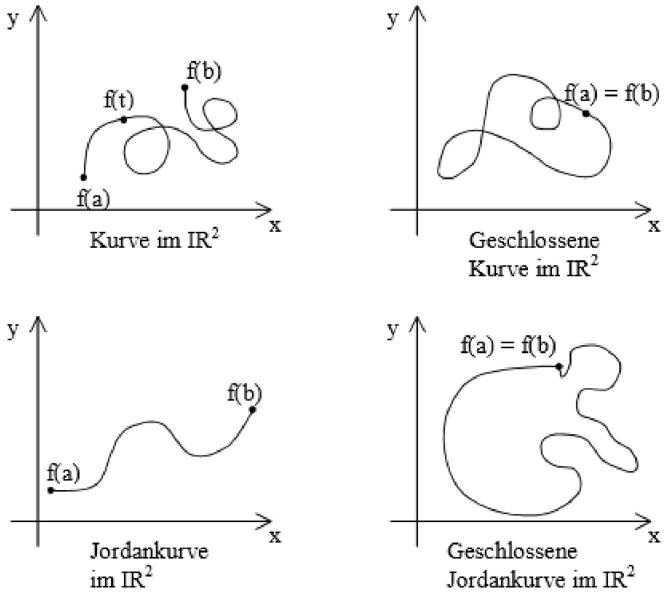
- Normal: Funktion $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}\right), a_i \le x_i \le b_i$
- Anschaulich: Einem x-Wert können mehrere y-Werte zugewiesen werden
- Formal: $K = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \middle| \vec{x} = f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, t \in I \right\}$
- K ist die Kurve, f die Parameterdarstellung der Kurve

Normale Funktionen als Kurve

- Wie stellt man $y = e^x$, $x \in [0,2]$ als Kurve dar?
- $K = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \middle| \vec{x} = f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, t \in I \right\}$
- $K = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \middle| \vec{x} = f(t) = \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}, t \in [0,2] \right\}$
- Oder auch $K = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \middle| \vec{x} = f(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ e^{2t} \end{pmatrix}, t \in [0,1] \right\}$
- → Parameterdarstellung nicht eindeutig!
- Unterschied, ob von a nach b oder umgekehrt

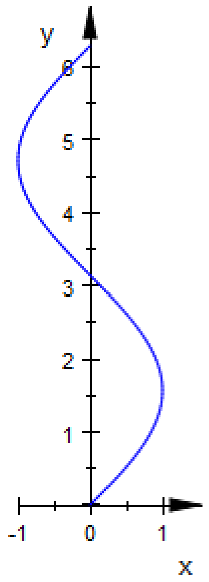
Begriffe

- Geschlossene Kurve: Anfangs- und Endpunkt sind gleich
- Jordankurve: injektiv, d.h. kein Punkt auf der Kurve kommt mehrmals vor -> anschaulich: keine Überkreuzungen



Beispiele zu Kurven

- Darstellung eines Einheitskreises als Kurve, von $\binom{1}{0}$ aus im Uhrzeigersinn.
- Sinuskurve an der y-Achse (siehe Grafik)



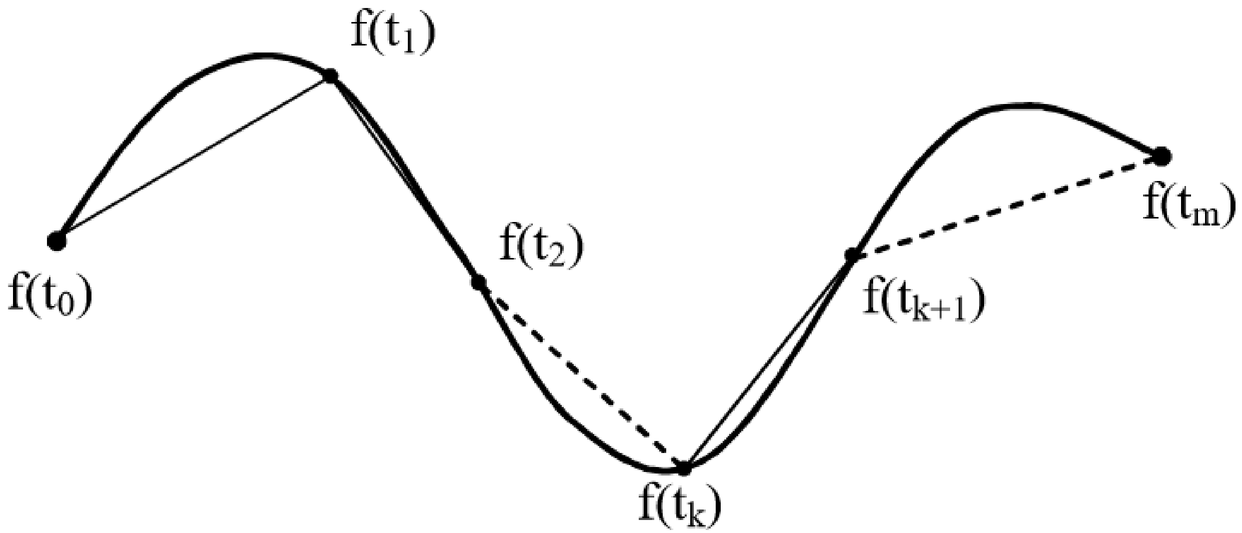
Tangente

- Kurve $K = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \middle| \vec{x} = f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, t \in I \right\}$
- Tangentenvektor: $\vec{f}'(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ \dots \\ f_n'(t) \end{pmatrix}$
- Tangentengleichung $T = \left\{ \vec{x} = \vec{f}(t) + \lambda \vec{f}'(t), \lambda \in \mathbb{R} \right\}$
- Tangenteneinheitsvektor: $\dfrac{\vec{f}'(t)}{\left\|\vec{f}'(t)\right\|}$

In Polarkoordinaten

- $x = r * \cos(\varphi), y = r * \sin(\varphi)$
  Darstellung meist in Abhängigkeit von φ:
  $$\rightarrow r = r(\varphi)$$
  $$K = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \middle| \vec{x} = f(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi)cos(\varphi) \\ r(\varphi)sin(\varphi) \end{pmatrix}, \varphi \in I \right\}$$

Bogenlänge



Beispiel Bogenlänge

- Länge der Kurve von $f(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin(t) \end{pmatrix}, 0 \leq \text{t} \leq 2\pi$

  Integral nicht von Hand ausrechnen!

- $f'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(t) \end{pmatrix}$

- $L(K) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1^2 + \cos(t)^2}\, dt$

```
int((sqrt(1+(cos(x))^2)),x=0..2*PI)
```

$4\sqrt{2}\,\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}\right)$

```
float(%)
```

7.640395578

restliche Inhalte (z.B. Kurvenintegrale) folgen noch

Quellen

- Erstellt von Simon Schweizer im Rahmen des Analysis 2 –Tutoriums der Medizinischen Informatik an der Hochschule Heilbronn / Universität Heidelberg
- Die Grafiken stammen, sofern sie nicht selbst erstellt sind, aus dem Analysis 2 – Skript von Prof. Dr. Laun, Hochschule Heilbronn